

SÉRIE A, N° 3176

N° D'ORDRE :

4048

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. Francis HALBWACHS

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LA DYNAMIQUE DU CORPUSCULE TOURNANT RELATIVISTE ET L'HYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE DES FLUIDES DOTÉS D'UNE DENSITÉ DE MOMENT ANGULAIRE INTERNE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 26 juin 1958, devant la Commission d'Examen.

MM. DE BROGLIE

Président.

LICHNEROWICZ

M^{me} TONNELAT

} *Examineurs*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1960

SÉRIE A, n° 3176

N° D'ORDRE :

4048

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. Francis HALBWACHS

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LA DYNAMIQUE DU CORPUSCULE TOURNANT RELATIVISTE ET L'HYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE DES FLUIDES DOTÉS D'UNE DENSITÉ DE MOMENT ANGULAIRE INTERNE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 26 juin 1958, devant la Commission d'Examen.

MM. DE BROGLIE

Président.

LICHNEROWICZ

M^{me} TONNELAT

} *Examineurs*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1960

**



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Doyen. M. J. PÉRÈS,

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	DANJON.....	T	Astronomie.
FOCH.....	T	Mécanique physique et expérimentale.	LAPORTE.....	T	Physique générale et Radio-activité.
PAUTHENIER.....	T	Électrotechnique générale.	JANET.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.	PETIT.....	T	Biologie maritime.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	QUENEY.....	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique.
GARNIER.....	T	Géométrie supérieure.	GALLIEN.....	T	Embryologie.
PÉRÈS.....	T	Mécanique des fluides et applications.	EICHHORN.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).
LAUGIER.....	T	Physiologie générale.	DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).
M. CURIE.....	T	Physique (S. P. C. N.).	M ^{lle} CAUCHOIS.....	T	Chimie Physique.
BARRABÉ.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	THÉLLIER.....	T	Physique du Globe.
G. DARMOIS.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	L'HÉRITIER.....	T	Génétique.
J. BOURCART.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	GRIVET.....	T	Radioélectricité.
PLANTEFOL.....	T	Botanique.	PONCIN.....	T	Mécanique des fluides.
GRASSÉ.....	T	Évolution des êtres organisés.	DUBREIL.....	T	Arithmétique et théorie des nombres.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	QUELET.....	T	Chimie organique.
BOULIGAND.....	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.	CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.	CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.
WYART.....	T	Minéralogie.	CAUVILLIER.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
TEISSIER.....	T	Zoologie.	JUNG.....	T	Pétrographie.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale.	TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.
P. AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	WIEMANN.....	T	Chimie organique et structurale.
MONNIER.....	T	Physiologie des fonctions.	JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et Physique céleste.
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.	VASSY.....	T	Physique de l'Atmosphère.
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).	DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.
H. CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	M. PRUVOST.....	T	Géologie.
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.	AMIEL.....	T	Chimie générale. (P. C. B.).
FAVARD.....	T	Mécanique générale.	HOCART.....	T	Minéralogie.
COULOMB.....	T	Physique du Globe.	J.-P. MATHIEU.....	T	Physique (P. C. B.).
M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie animale (S. P. C. N.).	COUTEAUX.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.	MAY.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
P. DRACH.....	T	Zoologie.	CHOQUET.....	T	Calcul différentiel et intégral.
KASTLER.....	T	Physique.	FELDMANN.....	T	Biologie (P. C. B.).
EPHRUSSI.....	T	Génétique.	GUINIER.....	T	Physique générale (P. C. B.).
WURMSER.....	T	Biologie physico-chimique.	JOST.....	T	Physiologie comparée.
RIVIÈRE.....	T	Géologie (S. P. C. N.).	FORTET.....	T	Calcul des probabilités.
GAUTHIERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	SCHWARTZ.....	T	Méthodes mathématiques de la Physique.
LUCAS.....	T	Recherches physiques.	CROUARD.....	T	Physiologie végétale.
A. THOMAS.....	T	Biologie cellulaire.	MALAVARD.....	T	Aviation.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	BRELOT.....	T	Calcul différentiel.
MAX MORAND.....	T	Enseignement de Physique.	NORMANT.....	T	Chimie organique.
SOLEILLET.....	T	Physique.	BÉNARD.....	T	Chimie (P. C. B.).
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).

DUQUÉ.....	T	Statistiques mathématiques.	M ^{me} CHAIX.....	Chimie biologique.
GELOSO.....	T	Chimie (S. P. C. N.).	M ^{me} HUREL-PY...	Biologie végétale (P. C. B.).
SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.	PIAUX.....	Chimie (P. C. B.).
ULRICH.....	T	Physiologie végétale.	BRUN.....	Mécanique expérimentale des fluides.
MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.	LEDERER.....	T Chimie biologique.
KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.	M ^{me} DUBREIL.....	T Mathématiques.
CHADEFAUD.....		Botanique.	M ^{me} LELONG.....	T Mathématiques (E. N. S.).
DESTRIAU.....	T	Physique (M. P. C.).	BELLAIK.....	Géologie (S. P. C. N.).
M ^{lle} LE BRETON...	T	Physiologie générale.	COTTE.....	T Physique (M. P. C.).
SALEM.....	T	Mathématiques générales.	J.-E. DUBOIS.....	T Chimie (S. P. C. N.).
LELONG.....	T	Mathématiques générales.	LAMOTTE.....	Zoologie (E. N. S.).
DEVILLERS.....		Anatomie et Histologie comparées.	MICHEL.....	T Chimie (S. P. C. N.).
EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.	OLMER.....	T Énergétique générale.
FRANÇON.....		Physique (S. P. C. N.).	ROUAULT.....	T Physique (Enseignement).
GLANGEAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	GAUTHIER.....	T Mécanique appliquée.
GODEMENT.....	T	Mathématiques (M. P. C.).	BARCHIEWITZ.....	Chimie physique.
PISOT.....	T	Calcul des Probabilités.	BROSSEL.....	Physique atomique.
E. ROCH.....	T	Géologie.	BUSER.....	Biologie animale (P. C. B.).
SCHATZMANN.....		Astrophysique.	CAMUS.....	Biologie végétale (P. C. B.).
TERMIER.....	T	Paléontologie stratigraphique.	CASTAING.....	Physique générale.
ZAMANSKI.....	T	Mathématiques générales.	CURIEN.....	Minéralogie et Cristallographie.
JOLIOI.....	T	Physique nucléaire et Radio-activité.	MOYSE.....	Physiologie végétale.
LENNUIER.....		Physique (P. C. B.).	NOIROI.....	Évolution des Êtres organisés.
RIZET.....		Génétique.	PANNETIER.....	Chimie (P. C. B.).
M ^{me} TONNELAT...		Théories physiques.	POSSOMPES.....	Biologie animale (P. C. B.).
DIXMIER.....		Mathématiques (M. P. C.).	PULLMANN.....	Chimie théorique.
SOUCHAY.....		Chimie générale (P. C. B.).	TEILLAC.....	Physique nucléaire et Radio-activité.
AIGRAIN.....		Physique (P. C. B.).	TONNELAT.....	Biologie physico-chimique.
BRUSSET.....		Chimie minérale.	VILLE.....	Économétrie.
M. LÉVY.....		Physique théorique.	WILLEMART.....	Chimie (P. C. B.).
LENORMANT.....		Physiologie.	BELLAIK.....	T Géologie (S. P. C. N.)

Secrétaire général..... CH. MONIER.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552215_0085

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

MAURICE HALBWACHS

SAVANT EXEMPLAIRE

« Découvrir ce qui maintient, au niveau le plus profond, la cohésion interne de l'univers, percevoir toutes les forces qui sont à l'œuvre, déceler les germes mêmes des choses, et cesser enfin de se payer de mots ».

(GÖTTE-Faust).

« Qu'il n'y a rien dans les corps qui puisse exciter en nous quelque sentiment, excepté le mouvement, la figure ou situation, et la grandeur de leurs parties ».

(DESCARTES-Principes).

« Le fleuve, et les gouttes dans le fleuve. La place de chaque goutte, sa relation avec les autres gouttes, son interdépendance avec les autres, la direction de son mouvement — rectiligne, courbe, circulaire — vers le haut, vers le bas. Les “notions”, comme saisie des différents aspects du mouvement, des différentes gouttes (ou “choses”), des différents courants... Telle est l'image dialectique de l'Univers ».

(Cahiers sur la dialectique de Hegel).

PRÉFACE

Dès les débuts de la Mécanique ondulatoire, on s'était aperçu qu'elle présentait un aspect hydrodynamique dont M. Madelung avait été le premier à signaler l'existence.

L'auteur de cette préface avait dès cette époque tenté d'utiliser cet aspect hydrodynamique pour obtenir une interprétation concrète de la Mécanique ondulatoire comportant le maintien de la notion de localisation du corpuscule dans l'espace (théorie de la double solution). A la suite d'un travail de M. Bohm, cette tentative a été reprise à l'Institut Henri Poincaré, notamment par M. Vigier et ses collaborateurs, MM. Hillion, Halbwachs, Lochak....

D'autre part, la notion de « spin » d'une particule, introduite pour l'électron en 1925 par MM. Uhlenbeck et Goudsmit, a pu, quelques années plus tard, s'incorporer à la Mécanique ondulatoire grâce à la théorie de l'électron à spin due à M. Dirac. La théorie de Dirac présente elle aussi, comme la Mécanique ondulatoire primitive, un aspect hydrodynamique, mais, comme elle est en accord avec les conceptions relativistes, elle conduit naturellement à une hydrodynamique de caractère relativiste. Bien qu'on ait soumis depuis 30 ans les équations de Dirac à d'innombrables analyses, c'est seulement dans ces dernières années que l'on a découvert toute la richesse des images mécaniques et hydrodynamiques qui sont cachées derrière ce formalisme. Cette découverte est due aux travaux de M. Takabayasi et aussi à ceux de MM. Bohm et Vigier. Elle a abouti récemment à une théorie générale des particules conçues comme de très petites gouttelettes fluides en mouvement de rotation relativiste ou plutôt, pour employer une image qui me paraît plus exacte, comme une très petite région de l'espace siège d'un champ

ondulatoire tourbillonnaire. Et cette nouvelle théorie des particules, qui définit chaque sorte de particule par un ensemble de nombres quantiques et interprète ainsi la formule aujourd'hui classique de Gell-Mann, fournit un modèle de particules tout à fait conforme à l'idée générale qu'il faut revenir en Microphysique à des conceptions plus concrètes.

Le travail de M. Halbwachs, qui a été l'objet de sa Thèse de doctorat et qui est exposé dans le présent ouvrage, constitue une très importante contribution à l'étude approfondie des images mécaniques et hydrodynamiques qui sont contenues dans le formalisme relativiste de Dirac. Après avoir rappelé les théories déjà anciennes, mais très instructives à méditer, qui ont été proposées par Frenkel, Mathisson et Weyssenhoff, M. Halbwachs a soumis à une analyse très détaillée l'étude du mouvement d'un corpuscule tournant relativiste. Précisant d'une façon minutieuse tous les aspects de cette théorie très complexe, il a montré comment il convenait de définir d'une manière rigoureuse le « centre de masse » et le « centre de matière » précédemment introduits par les travaux de MM. Bohm et Vigier, centres qui jouent un rôle fondamental dans la nouvelle théorie des particules. M. Halbwachs montre que, si l'on cherche à définir ces deux points remarquables de la structure d'un petit système relativiste tournant dans un référentiel galiléen quelconque, la définition obtenue n'a pas le caractère invariant qui est nécessaire : pour obtenir une définition invariante des deux centres, il faut les définir dans un référentiel fondamental qu'à la suite de Weyssenhoff, M. Halbwachs appelle le « référentiel d'inertie ». Tous ces points très délicats se trouvent ainsi très bien éclaircis.

Faisant ensuite un certain nombre d'applications de ces définitions fondamentales, l'auteur en arrive à l'introduction de deux grandeurs très importantes, l'une ayant le caractère d'un quadrivecteur et l'autre d'un pseudoquadrivecteur, qu'il nomme respectivement le « balourd » et la « giration ». L'étude détaillée du rôle de ces grandeurs le conduisent ensuite à les relier au quadrivecteur « spin » du formalisme de Dirac par des formules où figure un angle $\hat{A}$ précédemment introduit par M. Takabayasi dans ses travaux, angle dont la signification, restée jusque là

assez mystérieuse, se trouve ainsi éclaircie. Je ne saurais insister davantage sur les résultats exposés dans cette partie de sa thèse par M. Halbwachs qui soumet toujours toutes les questions qu'il étudie à un examen très méticuleux.

Muni de ces notions de base, M. Halbwachs aborde ensuite la théorie générale des modèles hydrodynamiques en se laissant souvent guider par les travaux de M. Takabayasi dont il expose les principales conclusions. Il développe l'image hydrodynamique dans le cas de l'équation non relativiste de Schrödinger, dans celui de l'équation relativiste à une fonction d'onde de Klein-Gordon et enfin dans le cas des équations d'ondes de Dirac. Dans tous ces cas, il étudie attentivement les interprétations qui ont été proposées et même d'autres que l'on pourrait envisager.

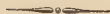
Le dernier chapitre de l'ouvrage est consacré aux fluides à spin à structure moléculaire. Considérant les propriétés moyennes d'un fluide constitué par des corpuscules ou des gouttelettes liquides possédant les caractéristiques minutieusement étudiées dans les chapitres précédents, l'auteur étudie le fluide moyen ainsi défini dans le cas où le spin n'intervient pas et dans celui où il intervient. Il étudie en grand détail toute une série de questions relatives au comportement à divers points de vue d'un tel fluide.

Nous concluons en disant que le travail de M. Halbwachs constitue un document extrêmement important pour l'étude de problèmes qui sont sans doute appelés à jouer un grand rôle dans les prochains développements de la Microphysique quantique.

Examinant d'une façon très serrée les questions relatives à l'hydrodynamique des corps en rotation quand on tient compte de la théorie de la Relativité, résumant et analysant tous les résultats déjà obtenus par d'autres chercheurs en y ajoutant, à côté de nombreuses précisions ou rectifications, d'importantes contributions personnelles, M. Halbwachs a accompli une œuvre qui est en elle-même très importante et qui peut aussi contribuer, comme je l'ai indiqué au début de cette préface, à consolider les bases d'une réinterprétation de la Mécanique ondulatoire et celles des tentatives qui tendent à obtenir un modèle concret des particules dont les différents types correspondraient à des états

quantifiés de gouttelettes liquides (ou, à mon sens plus exactement, de champs ondulatoires) en rotation relativiste. A ce point de vue, la thèse de M. Halbwachs vient à son heure et présente un très grand intérêt.

LOUIS DE BROGLIE.



AVERTISSEMENT

Le présent travail se maintient, pour l'essentiel, dans le cadre de la Relativité Restreinte. On considèrera, sauf avis contraire, un univers de Minkowski à métrique euclidienne, rapporté exclusivement à des référentiels galiléens. Ainsi, on n'aura pas à distinguer les composantes covariantes des composantes contrevariantes, tous les indices tensoriels seront placés en position inférieure, la sommation devant être effectuée sur les indices répétés deux fois.

Les indices grecs (μ, ν, α, β) seront utilisés pour les composantes d'univers ($\mu = 1, 2, 3, 4$) avec pour quatrième composante : $x_4 = ict$.

Les indices latins $i, j, k \dots$ désigneront des composantes d'espace ($i = 1, 2, 3$).

On aura parfois à désigner la composante de temps réelle d'un vecteur d'univers V_μ . On la désignera par :

$$V_0 \equiv \frac{1}{ic} V_4$$

laissant la notation V_0 pour désigner un invariant (module, masse propre). Les signes ^{0,1} en position supérieure désignent les composantes d'un vecteur dans le référentiel propre Σ_0 , ou dans un référentiel Σ_1 : $V_k^0, V_4^0, V_k^1, V_4^1$.

Les dérivées, par rapport aux coordonnées, sont désignées par : $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

La dérivée par rapport au temps *propre*, par $\frac{d}{d\tau}$, ou par un point : $\frac{d}{d\tau} G_\mu = \dot{G}_\mu$.

On utilisera le symbole de Kroneker :

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu} &= 1 & \text{si} & \mu = \nu \\ \delta_{\mu\nu} &= 0 & \text{si} & \mu \neq \nu \end{aligned}$$

ainsi que les symboles généralisés :

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} &= \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} \\ \delta_{\lambda\beta\gamma}^{\mu\nu\lambda} &= \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta_{\lambda\gamma} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\gamma}\delta_{\lambda\alpha} + \delta_{\mu\gamma}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\lambda\beta} \\ &\quad - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\gamma}\delta_{\lambda\beta} - \delta_{\mu\gamma}\delta_{\nu\beta}\delta_{\lambda\alpha} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\lambda\gamma} \end{aligned}$$

On utilisera aussi les symboles complètement antisymétriques de Levi-Civita ε_{ijk} et $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ qui sont nuls si deux des indices sont égaux, ont la valeur $+1$ si i, j, k ou μ, ν, α, β se déduisent de 1, 2, 3 ou 1, 2, 3, 4 par un nombre pair de permutations, et la valeur -1 s'il faut un nombre impair de permutations. On se souviendra qu'une permutation circulaire laisse invariable ε_{ijk} et change le signe de $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$. On utilisera les relations connues :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} &= 2\delta_{kl} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} &= \delta_{lm}^{jk} \\ \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} &= 3!\delta_{\sigma\tau} \\ \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} &= 2\delta_{\alpha\beta}^{\sigma\tau} \\ \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} &= \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\nu\sigma\tau} \end{aligned}$$

On utilisera également l'opérateur de projection de Takabayasi : $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2}$ qui permet de former l'expression covariante de la projection d'un vecteur A_μ sur l'hyperplan d'espace propre orthogonal à la vitesse unitaire u_μ ($u_\mu u_\mu = -c^2$) soit :

$$A_\mu^{(u)} = \eta_{\mu\nu} A_\nu$$

On a évidemment : $\eta_{\mu\nu} \eta_{\mu\lambda} = \eta_{\nu\lambda}$ $\eta_{\mu\nu} u_\nu = 0$.

Enfin, si le vecteur A_μ est lui-même dans l'espace propre ($A_\mu u_\mu = 0$), on a : $\eta_{\mu\nu} A_\nu = A_\mu$.

On désignera par $S_{[\mu\nu]}$ un tenseur antisymétrique :

$$S_{[\mu\nu]} = -S_{[\nu\mu]}$$

et par $S_{\mu\nu}$ la partie antisymétrique d'un tenseur $S_{\mu\nu}$ quelconque :

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (S_{\mu\nu} - S_{\nu\mu}).$$

Si $S_{\mu\nu}$ est lui-même antisymétrique, on aura : $S_{[\mu\nu]} = S_{\mu\nu}$.

Rappelons que le produit contracté d'un tenseur antisymétrique $S_{[\mu\nu]}$ par une quantité symétrique : $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ est nul : $S_{[\mu\nu]} A_{\mu\nu} = 0$.

Nous appellerons *duals d'espace* d'un tenseur s_{ij} ou d'un vecteur σ_k les quantités :

$$\widehat{s}_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} s_{ij}$$

$$\widehat{\sigma}_{[ij]} = \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

Si le tenseur s_{ij} est antisymétrique, la donnée de $s_{[ij]}$ ou la donnée de son dual $\widehat{s}_k$ sont équivalentes, et le dual du dual de $s_{[ij]}$ est $s_{[ij]}$.

De même, on définit les *duals d'univers* des quantités $f_{\mu\nu\lambda}$, $s_{\mu\nu}$, σ_μ par :

$$\widehat{f}_\alpha = \frac{i}{3!} \varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda} f_{\mu\nu\lambda}$$

$$\widehat{s}_{[\alpha\beta]} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} s_{\mu\nu}$$

$$\widehat{\sigma}_{[\alpha\beta\gamma]} = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} \sigma_\mu$$

Si le tenseur $s_{\mu\nu}$ est antisymétrique, la donnée de $s_{[\mu\nu]}$ ou celle de son dual $\widehat{s}_{[\mu\nu]}$ sont équivalentes et le dual du dual de $s_{[\mu\nu]}$ est $-s_{[\mu\nu]}$. De même, la donnée d'un tenseur $f_{[\mu\nu\lambda]}$ complètement antisymétrique est équivalente à celle de son dual $\widehat{f}_\mu$ et le dual du dual de $f_{[\mu\nu\lambda]}$ est $f_{[\mu\nu\lambda]}$.

Nous avons traité à part, dans nos Appendices A, B et C, des questions — d'ailleurs classiques — qui ne se rattachent pas directement à l'étude du corpuscule tournant ni des fluides à spin. Néanmoins, nous nous y référons constamment et leur connaissance est indispensable à la compréhension de l'ensemble de l'ouvrage. Toutes les références bibliographiques sont renvoyées à la fin du volume.

Avant de commencer mon exposé, je tiens à exprimer, ici, toute ma reconnaissance à M. Louis de Broglie et à M. André Lichnérowicz qui ont bien voulu accepter de diriger mon

travail et qui, soit par leurs conseils, soit par leurs ouvrages, m'ont apporté une aide inestimable. Je veux remercier également, pour les nombreux éclaircissements qu'ils m'ont prodigués, M. le professeur David Bohm, de Bristol et M. le professeur Takehiko Takabayasi, de Nagoya, ainsi que tout le groupe des chercheurs de l'Institut Henri Poincaré qui, dans la ligne de pensée de l'interprétation causale, constitue une admirable équipe de travail collectif. Je remercie aussi M. le professeur Casimir Jausseran, de Marseille, à qui je dois de m'être consacré à la recherche et qui m'a procuré des conditions de travail idéales, ainsi que M. le professeur Georges Bodiou, de Marseille, qui m'a guidé dans certaines questions mathématiques. Mais l'appui essentiel, j'en suis redevable à M. Jean-Pierre Vigier qui a suivi, pas à pas, tous mes efforts, et sans qui je n'aurais pas pu envisager de mener ce travail jusqu'au bout. Qu'il trouve ici, comme ami et comme maître, l'expression de ma profonde gratitude.

INTRODUCTION

§ 1. Représentation hydrodynamique de Madelung.

On sait que l'équation de Schrödinger dans un champ extérieur dérivant d'un potentiel scalaire $V(\mathbf{x})$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - V \psi$$

se subdivise, en posant : $\psi = \text{Re} \frac{e^{iS}}{\hbar}$ (S et R réels), en deux équations réelles :

$$(J) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R} = 0$$

$$(C) \quad \frac{\partial (R^2)}{\partial t} + \nabla \left(R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0.$$

La première équation qui, au terme en $\hbar^2$ près, reproduit l'équation de Jacobi, est la base des conceptions de l'interprétation causale ^(16, 28, 29) Conformément au formalisme de la dynamique analytique classique, on considère la fonction d'action S comme un potentiel dont le gradient représente un vecteur impulsion :

$$m \mathbf{v} = \nabla S$$

et, pour retrouver l'expression exacte de l'équation de Jacobi, on introduit un « potentiel quantique » :

$$Q = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R}$$

qui vient s'adjoindre au potentiel V des forces. On a alors :

$$(J) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} m v^2 + (V + Q) = 0$$

$$(C) \quad \frac{\partial (R^2)}{\partial t} + \nabla (R^2 \mathbf{v}) = 0.$$

L'équation (J) montre que la quantité $-\frac{\partial S}{\partial t}$ représente l'énergie classique d'une particule de masse m et de vitesse $\mathbf{v}$ placée dans un champ de potentiel $V + Q$. Si on prend le gradient des deux membres, on voit que cette particule exécutera un mouvement classique, compte tenu de la force extérieure $-\nabla(V + Q)$. Par rapport au mouvement non quantique satisfaisant à l'équation de Jacobi proprement dite :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V = 0$$

on voit que les effets quantiques sont introduits uniquement par la présence du potentiel :

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R}$$

entièrement déterminé par la fonction R , laquelle à son tour obéit à l'équation de continuité analytique (C).

Ceci étant, on peut proposer une interprétation, que nous appellerons « statistique » ⁽⁴⁰⁾ de la fonction R : si on considère un ensemble très nombreux de corpulences identiques distribués avec une densité : $\rho = R^2$, l'équation (C) exprime simplement la conservation du nombre de corpuscules au cours de leur mouvement ⁽¹⁶⁾. Cette conception des ensembles, ou nuages de corpuscules, suppose une distribution initiale bien déterminée et soulève, de ce fait, des difficultés qui, on le sait, n'ont pu être résolues que récemment, en introduisant l'hypothèse de fluctuations stochastiques de l'onde autour d'un état moyen exprimé par les équations (C) et (J) (voir ci-dessous).

Mais il est possible, sur la seule base de ces équations, de construire mathématiquement un modèle de *fluide représentatif* en introduisant en chaque point une densité de matière : $\rho = R^2$ (ou une densité de masse : $\mu = \rho m$) et une vitesse du courant : $\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m}$.

Ce fluide fournira à la fois une représentation hydrodynamique de la fonction d'onde de Schrödinger, et une représentation continue moyenne des ensembles de corpuscules de la théorie précédente. Aux lois dynamiques quasi-classiques régissant le corpuscule de la théorie causale, correspondront ici des lois hydrodynamiques, également quasi-classiques. Ce modèle de fluide a été proposé par Madelung ⁽⁴¹⁾ dès 1927, c'est-à-dire l'année même où M. de Broglie posait les fondements de la formulation statistique.

L'équation (C) assurant, comme nous venons de le dire, le caractère

conservatif du fluide, on remarque qu'en faisant dériver le champ de vitesses du potentiel $\frac{S}{m}$ on se limite au cas des écoulements irrotationnels, le rotationnel d'un gradient étant nul. Considérons l'équation (J) exprimée dans la notation tensorielle :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \partial_j S \partial_j S + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_j \partial_j R}{R} = 0.$$

Prenons son gradient, remplaçons-y $\partial_j S$ par $m \nu_j$ et multiplions-la par $\rho = R^2$:

$$\rho \frac{\partial(m\nu_k)}{\partial t} + \rho \nu_j \partial_j (m\nu_k) = -\rho \partial_k V + \rho \partial_k \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_j \partial_j R}{R} \right).$$

Étant donné l'équation (C) : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j (\rho \nu_j) = 0$, le premier membre peut aussi bien s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m \nu_k) + \partial_j (\nu_j \rho m \nu_k),$$

forme dans laquelle nous reconnaissons la dérivée $\frac{d}{dt}$ de la densité $\rho m \nu_k$ le long d'une ligne de courant (voir appendice A). D'autre part, si on se souvient que V désigne le potentiel de la force $F_k = -\partial_k V$ relative à une particule, $-\rho \partial_k V$ désigne la densité de force extérieure f_k . On a donc finalement :

$$\frac{d}{dt} (\rho m \nu_k) = f_k + \frac{\hbar^2}{2m} \rho \partial_k \left(\frac{\partial_j \partial_j R}{R} \right).$$

On reconnaît l'équation d'Euler de l'hydrodynamique classique, avec en plus de la densité de force extérieure f_k , une autre densité de force quantique qui s'exprime en fonction du potentiel quantique de l'interprétation causale.

Cette force quantique n'a pas la forme du gradient d'un scalaire. Il est facile de montrer qu'elle manifeste l'existence de *tensions quantiques* à l'intérieur du fluide. On peut, en effet, l'écrire :

$$\varphi_k \equiv \frac{\hbar^2}{2m} R^2 \partial_k \left(\frac{\partial_j \partial_j R}{R} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} (R \partial_k \partial_j \partial_j R - \partial_k R \partial_j \partial_j R)$$

ou, en intégrant par parties les deux termes :

$$\varphi_k = \frac{\hbar^2}{2m} [\partial_j (R \partial_j \partial_k R) - \partial_j (\partial_j R \partial_k R)]$$

Sous cette forme, on voit que φ_k est la divergence d'un tenseur symétrique θ_{jk} qu'on doit considérer comme un *potentiel des tensions internes* rap-

porté à l'unité de volume :

$$\varphi_k = -\partial_j \theta_{kj}$$

avec

$$\theta_{kj} = \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_k R \partial_j R - R \partial_k \partial_j R)$$

ce qu'on peut aussi écrire, en réintroduisant la densité $\rho = R^2$

$$\theta_{kj} = -\frac{\hbar^2}{2m} R^2 \partial_k \left(\frac{\partial_j R}{R} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} R^2 \partial_k \partial_j \text{Log } R = -\frac{\hbar^2}{2m} \rho \partial_k \partial_j \text{Log } \sqrt{\rho}$$

$$\theta_{kj} = -\frac{\hbar^2}{4m} \rho \partial_k \partial_j \text{Log } \rho$$

On voit que le fluide n'est pas parfait, les composantes rectangles du tenseur des tensions n'étant pas nulles en général. On peut cependant, en ne considérant que les composantes carrées, définir une pression interne p (voir appendice B), qui ne suffira pas, en général, à caractériser complètement l'ensemble des forces de tension :

$$p = \frac{1}{3} \theta_{jj} = \frac{\hbar^2}{6m} [(\nabla R)^2 - R \Delta R]$$

ou encore :

$$p = -\frac{\hbar^2}{12m} \rho \Delta (\text{Log } \rho).$$

Cette représentation hydrodynamique rend de très grands services, avant tout comme support intuitif du raisonnement, dès lors qu'on est déterminé, comme c'est le cas des recherches effectuées dans le cadre de l'interprétation causale, à représenter les grandeurs physiques par des variables classiques, c'est-à-dire à interpréter les « observables » de la mécanique quantique au moyen de « variables cachées » possédant une variance tensorielle et liées par des équations différentielles qui les soumettent à des lois déterministes en principe. Il nous a paru utile de montrer rapidement, à titre d'exemple, comment on utilise le fluide de Madelung pour démontrer, dans le cas de l'équation de Schrödinger, les deux théorèmes fondamentaux de l'interprétation causale.

§ 2. Loi de guidage de l'interprétation causale.

On sait que dans la théorie dite de la « double solution » (16. 30. 65), l'aspect corpusculaire d'un microobjet est représenté par une singularité de l'amplitude de la fonction d'onde, cette fonction d'onde : $U = f e^{iS/\hbar}$ obéissant en tout point, à l'exception d'une petite région de rayon r_0 de l'ordre de grandeur des dimensions classiques de la particule (10^{-13}),

à l'équation d'onde linéaire ordinaire. La fonction U peut se décomposer en deux fonctions : $U = U_0 + \varphi$. La seconde : $\varphi = \text{Re} \frac{is'}{\hbar}$ est une fonction *régulière* qui, prise isolément, est solution en tout point de l'équation d'onde linéaire. Elle sera représentée par un fluide régulier de densité : $\rho' = R^2$ et de vitesse : $\mathbf{v} = \frac{\nabla S'}{m}$.

On suppose que la fonction totale U ne commence à différer sensiblement de la fonction régulière φ qu'à l'intérieur d'une sphère de rayon r_1 ($r_1 \gg r_0$). Dans cette sphère se produit, en ce qui concerne le fluide réel représentant la fonction d'onde complète, une *singularité* de la densité, c'est-à-dire une très forte concentration du fluide. On suppose qu'à l'échelle de r_1 , la fonction S' relative à φ et son gradient sont uniformes ainsi que le champ extérieur.

Du point de vue ondulatoire, ces hypothèses signifient que la singularité est beaucoup plus petite que la longueur d'onde de l'onde régulière associée. Les variations du champ extérieur peuvent ne pas être négligeables à l'échelle de la longueur d'onde. C'est précisément ce qui caractérise le « domaine quantique » et, en particulier, les champs atomiques. Notre démonstration restera valable pourvu que ces variations deviennent négligeables à l'échelle de la singularité, c'est-à-dire des dimensions du corpuscule lui-même.

Nous allons démontrer la relation de guidage de Jacobi :

$$m\mathbf{v} = \nabla S'$$

qui relie la vitesse $\mathbf{v}$ de la singularité à la vitesse : $\mathbf{V} \equiv \frac{\nabla S'}{m}$ du courant du fluide régulier, mais dans ces conditions, nous aurons démontré que cette relation *classique* est encore valable au niveau *quantique*.

On caractérise la singularité par le fait qu'à l'intérieur de la sphère de rayon r_1 , la densité $\rho = f^2$ croît très rapidement avec $\frac{1}{r}$, de telle sorte que $\frac{\partial \rho}{\partial r}$ soit beaucoup plus grand que ρ , et qu'on puisse considérer comme nul le rapport $\frac{\rho}{\partial \rho / \partial r}$. On suppose, en outre, qu'à l'échelle de r_1 , le déplacement de la singularité de densité au cours du temps s'effectue sans déformation de la distribution de ρ dans la singularité. Les valeurs de ρ se déplacent au cours du temps avec une vitesse $\mathbf{v}$ qui est la même en grandeur et en direction pour tous les points de la singularité.

Ceci dit, toute la démonstration repose sur l'hypothèse suivante, dite du « raccord de phase » : il existe dans le domaine de la singularité

compris entre les rayons r_0 et r_1 une surface fermée Σ où la densité du fluide à singularité ρ est la même en tout point, et où la phase S de l'onde complète est et reste constamment égale à la phase S' (uniforme) de l'onde régulière φ , et il en est de même de leurs dérivées premières. Cette hypothèse n'a pas de signification hydrodynamique. Elle se réfère explicitement à la nature ondulatoire des fonctions U et φ pour lesquelles elle représente une sorte de condition de résonance.

Elle ne peut résulter que de la forme particulière de la fonction singulière.

Considérons alors la surface Σ et la position Σ' où elle s'est transportée en bloc au bout du temps δt , chaque point M passant en M' avec une même vitesse $\mathbf{v}$ qui sera ainsi la vitesse de la singularité. On a représenté en M le vecteur $\mathbf{n}$ normal à la surface Σ et par conséquent colinéaire à $\nabla\rho$. On a aussi représenté une surface d'onde π de l'onde régulière, ainsi que le courant $\mathbf{V}$ du fluide corres-

pondant, uniforme à l'échelle de r_1 et colinéaire à $\nabla S'$.

Si le déplacement de M est $\mathbf{v} \delta t$, la densité du fluide en M' à l'instant $t + \delta t$ sera :

$$\rho_{M'} = \rho_M + \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta t + \partial_k \rho v_k \delta t.$$

Mais comme la surface Σ s'est déplacée en bloc avec la même valeur de ρ :

$$\rho_{M'} = \rho_M$$

ou :

$$\partial_k \rho v_k \delta t + \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta t = 0$$

ou :

$$\partial_k \rho v_k = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

le produit scalaire $\partial_k \rho \mathbf{v}_k$ peut s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} v \cos(\mathbf{n}, \mathbf{v})$$

d'où le module de $\mathbf{v}$:

$$v \cos(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = - \frac{\partial \rho / \partial t}{\partial \rho / \partial n}.$$

Appliquons l'équation de continuité du fluide de Madelung :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m}.$$

L'hypothèse du raccord des phases nous permet alors d'identifier le gradient ∇S de la phase de l'onde à singularité, et le gradient $\nabla S'$ de la phase de l'onde régulière, qui est la vitesse $\mathbf{V}$ uniforme du fluide régulier. On a donc :

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{V} + \rho \Delta S' = 0$$

ou encore :

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + m \frac{\partial \rho}{\partial n} V \cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}) + \rho \Delta S' = 0.$$

Divisons par $\frac{\partial \rho}{\partial n}$:

$$m \frac{\partial \rho / \partial t}{\partial \rho / \partial n} + m V \cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}) + \frac{\rho}{\partial \rho / \partial n} \Delta S' = 0.$$

Le dernier terme peut être négligé en raison des hypothèses sur la singularité. Le premier est égal à :

$$- m v \cos(\mathbf{n}, \mathbf{v}).$$

Ainsi :

$$m v \cos(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = m V \cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}).$$

Les valeurs et les directions de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{V}$ sont uniformes sur toute la surface Σ . Au contraire $\mathbf{n}$ varie et peut pointer dans toutes les directions de l'espace. C'est pourquoi la condition ci-dessus ne peut être vérifiée en tout point que si les directions $\mathbf{v}$ et $\mathbf{V}$ sont confondues, ce qui entraîne aussi l'égalité des deux vitesses. Ainsi les singularités sont entraînées et guidées par le courant du fluide régulier. C'est la *loi de guidage* de la mécanique quantique.

§ 3. Théorème statistique de Bohm et Vigier.

C'est également au moyen de l'image du fluide de Madelung que Bohm et Vigier (^{31, 32, 33}) ont pu démontrer que la distribution : $P = R^2$ d'un ensemble très nombreux de particules ayant même fonction d'onde ne représentait pas un cas particulier répondant à des conditions initiales spéciales mais, au contraire la distribution limite vers laquelle tend nécessairement un tel nuage de corpuscules, quelle que soit leur distribution initiale. Rappelons rapidement cette démonstration fondamentale. L'hypothèse de base est que le fluide de Madelung représente l'état moyen d'un fluide réel soumis à des fluctuations désordonnées, fluide obéissant toujours à la loi de conservation, mais dont la vitesse n'est plus le gradient d'une fonction de Jacobi. Les fluctuations du fluide reflètent des fluctuations de la fonction d'onde, dues, soit aux

variations continues des conditions aux limites (agitation thermique des molécules des appareils d'interférence, par exemple), soit à l'influence de phénomènes sous-quantiques, incohérents par rapport au niveau quantique.

On suppose que ce fluide chaotique entraîne un grand nombre de particules réparties avec une densité moyenne $P(x, t)$ et obéissant à la loi de guidage. Comme celle-ci est une conséquence de l'équation de continuité seule, équation qui est encore vraie pour le fluide chaotique, il est correct de penser que les corpuscules se déplaceront avec la vitesse v de ce fluide et l'accompagneront dans ses fluctuations. On suppose que les fluctuations sont telles qu'un élément de fluide situé dans un élément de volume déterminé de la région où la densité ρ_0 du fluide moyen n'est pas nulle, a une probabilité non nulle de provenir de tout autre élément de cette même région.

Pour exprimer ces déplacements du fluide (qui peut se dilater ou se contracter), on utilise une représentation conforme de l'espace des x sur un espace des ξ qu'on astreindra à être rempli d'une densité *moyenne* uniforme et constante. A l'élément de volume $d\mathbf{x}$ ($dx_1 dx_2 dx_3$) correspond l'élément $d\xi$ ($d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$) qui lui est relié au moyen du jacobien J de la transformation :

$$(J-1) \quad d\mathbf{x} = J \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \right) d\xi.$$

La quantité de matière du fluide (moyen) de Madelung contenue dans $d\mathbf{x}$ est :

$$dQ = \rho_0(x, t) d\mathbf{x} = \rho_0(x, t) J \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \right) d\xi.$$

Cette quantité devra, dans l'espace des ξ être proportionnelle au volume $d\xi$:

$$\rho_0(x, t) J \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \right) = C$$

ou encore :

$$J \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{C} \rho_0(x, t).$$

C'est une seule condition pour déterminer trois fonctions $\xi_1(x, t)$, $\xi_2(x, t)$, $\xi_3(x, t)$. On a donc une large indétermination. On peut remarquer qu'à l'espace illimité des x correspondent des valeurs limitées des ξ , car les volumes égaux de l'espace des ξ contiennent des quantités de matière égales et correspondent à des volumes de l'espace des x d'autant

plus grands que la densité est plus faible. Par ailleurs, l'équation (1) dépendant du temps, les mailles de l'espace des ξ se déformeront dans l'espace des x au cours du temps.

En ce qui concerne les particules, si leur densité est $P(x, t)$ dans l'espace des x , elle devient dans l'espace des ξ :

$$F(\xi, t) = \frac{P(x, t)}{J\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)} = \frac{P(x, t)}{\rho_0(x, t)}.$$

On voit que si la densité P des particules est proportionnelle à la densité ρ_0 du fluide de Madelung, la fonction $F(\xi, t)$ sera uniforme et constante dans l'espace des ξ . Considérons un élément de volume $\delta\xi$ centré sur ξ à l'instant t . A un instant *antérieur* t' , le fluide de $\delta\xi$ était contenu dans un autre élément (égal) centré en un autre point ξ_1 . On peut évaluer la probabilité pour que cet autre point ξ_1 ait été contenu dans l'élément $d\xi'$ centré sur ξ' :

$$d\Pi = K(\xi\xi'u') d\xi'.$$

Comme ξ_1 était certainement en un des points du domaine Δ des ξ (représentant le domaine des x où ρ_0 n'est pas nul), l'intégrale de cette probabilité sur tout le domaine Δ est égale à 1 :

$$\int_{\Delta} K(\xi\xi'u') d\xi' = 1$$

quels que soient ξ , t et t' .

Comme les particules suivent le fluide dans ses fluctuations, on a :

$$(J-2) \quad F(\xi, t) = \int_{\Delta} K(\xi\xi'u') F(\xi't') d\xi'.$$

A chaque instant, il existe dans l'ensemble de la distribution des particules, un point $\xi_M(t)$ où la densité F est maximum et égale à $M(t)$, et un autre point $\xi_m(t)$ où elle est minimum et égale à $m(t)$. La densité au point $\xi_M(t)$ à l'instant t est donnée, conformément à l'équation (2) par :

$$M(t) = \int_{\Delta} K[\xi_M(t), \xi', t, t'] F(\xi', t') d\xi'.$$

Si on remplace sous le signe $\int$ la fonction $F(\xi't')$ par sa valeur maximum à l'instant t' , $M(t')$, on a évidemment une valeur plus grande de l'intégrale :

$$\int_{\Delta} K[\xi_M(t), \xi', t, t'] M(t') d\xi' \geq M(t).$$

Mais on peut faire sortir $M(t')$ du signe $\int$ et l'intégrale qui reste : $\int_{\Delta} K[\xi_M(t) \xi', t, t'] d\xi'$ est égale à 1. On a donc :

$$M(t') \geq M(t).$$

Un raisonnement identique nous montre que :

$$m(t') \leq m(t).$$

Donc à mesure que le temps s'écoule ($t' < t$), la densité maximum des particules diminue et la densité minimum augmente. Le fluide va donc tendre vers un état où ces deux valeurs seront égales, et où, par conséquent, la valeur de $F(\xi, t)$ sera uniformément égale à cette limite commune dans tout le domaine. A partir de ce moment, le cas :

$$m(t) = m(t') = M(t) = M(t')$$

se trouvera réalisé et subsistera indéfiniment. Cela signifie, en repassant à l'espace ordinaire, que la densité $P(x, t)$ des corpuscules sera constamment et en chaque point proportionnelle à la densité $\rho_0(x, t)$ du fluide moyen de Madelung.

Les deux démonstrations précédentes reposent sur des théorèmes très généraux, tels que la relation de conservation, ou les lois statistiques pour les processus de Markow. Elles peuvent donc être étendues facilement à d'autres équations d'onde et à d'autres types de micro-objets, pourvu qu'on ait pu édifier les représentations hydrodynamiques correspondantes. Elles permettent, dans chaque cas, de rendre compte, par un modèle déterministe en principe, des distributions statistiques observables, en prenant comme grandeurs physiques fondamentales des « variables cachées », tout à fait étrangères à l'interprétation probabiliste habituelle de la mécanique quantique. On voit l'importance que revêt dans cette perspective, la recherche de représentations hydrodynamiques pour les différentes fonctions d'onde utilisées par la mécanique quantique.

§ 4. Modèle hydrodynamique du vide.

De plus, on sait qu'une des caractéristiques essentielles de l'interprétation causale est que le formalisme linéaire de la mécanique quantique ordinaire est considéré par elle comme une *approximation*, valable à un certain niveau de la réalité, d'équations d'ondes exactes qui sont *non-linéaires*. Les termes non linéaires n'interviennent sensiblement qu'au voisinage immédiat du centre des singularités (à la distance r_0 consi-

dérée plus haut), si bien qu'ils ne modifient pas les résultats donnés par le formalisme linéaire à l'échelle atomique. Mais l'hypothèse de leur existence est essentielle à la théorie, dès le niveau quantique. Ce sont eux qui sont sous-jacents aux hypothèses sur le raccord des phases entre onde régulière et singularité, que nous avons rappelées, et par conséquent qui sont responsables du guidage des particules par les ondes. Ce sont eux qui empêchent les singularités de s'étaler et de s'évanouir au fur et à mesure que l'amplitude de l'onde en expansion diminue. Enfin, les perspectives que la théorie espère ouvrir sur une interprétation satisfaisante des forces nucléaires sont liées à l'idée qu'au niveau nucléaire, ce sont les termes non linéaires qui deviennent prépondérants.

Or, il est très difficile de progresser dans la recherche de ces termes non-linéaires, d'une part à cause des calculs très ardues qui caractérisent le traitement des équations non-linéaires, mais aussi faute d'hypothèse directrice qui permette de guider la recherche au milieu de l'infinie variété des formes possibles. Il se peut que l'image hydrodynamique fournisse une telle hypothèse et ouvre une voie féconde. En effet, il est bien connu que l'étude de la propagation des ondes sur les fluides matériels en hydrodynamique classique utilise, en première approximation, des équations linéaires valables seulement pour des ondes régulières et de faible amplitude. Mais on sait très bien que ce n'est qu'une approximation, et les équations complètes non-linéaires fournies par les propriétés des fluides en présence de contraintes importantes, sont souvent utilisées pour l'étude de la propagation des « ondes de choc », ondes de très forte amplitude ou comportant des singularités.

On peut, en raisonnant par analogie, espérer représenter les ondes linéaires de la mécanique quantique comme des ondes de faible amplitude, se propageant sur un fluide déterminé, et ensuite se laisser guider par les équations non-linéaires représentant la propagation des ondes de choc sur ce même fluide, et atteindre ainsi des types déterminés de termes non-linéaires à adjoindre aux équations quantiques.

Cette hypothèse de travail introduit le formalisme hydrodynamique en mécanique quantique sur un plan qui diffère complètement de la méthode des « représentations hydrodynamiques » rappelée plus haut. Ici, le fluide est supposé posséder une réalité objective et traduire les propriétés physiques effectives d'un « milieu matériel », support réel des phénomènes ondulatoires. Ce concept nouveau est introduit à la place des concepts habituels de « champ », ou même de « vide », dont il précise les propriétés en les exprimant sous forme hydrodynamique.

Le présent travail a pour objet d'étudier les lois hydrodynamiques fondamentales de certains types très généraux de fluides pouvant servir à une telle entreprise, et plus particulièrement de tirer les conséquences du principe généralement admis, qui veut que les fonctions d'onde des particules douées de spin soient relatives à des fluides possédant une *densité de moment angulaire interne*. On n'abordera pas l'étape suivante consistant à étudier la propagation de mouvements vibratoires sur de tels fluides et à comparer les équations de propagation ainsi obtenues aux équations d'ondes de la mécanique quantique.

§ 5. Fluides à spin et corpuscules tournants.

Il est remarquable que les divers auteurs qui ont abordé la théorie des fluides possédant une densité de moment angulaire interne (fluides à spin) — théorie qu'il faut bien se garder de confondre avec celle des mouvements tourbillonnaires dans les fluides classiques ^(46, 67) — ont introduit cette nouvelle densité par voie axiomatique; soit, comme Weyssenhoff ⁽²⁾, sous forme d'un tenseur du second ordre antisymétrique « densité de moment angulaire interne »; soit, comme Costa de Beauregard ⁽⁶⁸⁾, sous forme d'un vecteur, dual d'un tenseur du troisième ordre complètement antisymétrique, représentant une « densité de spin »; soit, comme Pham Mau Quan ⁽⁶⁹⁾, sous forme de grandeurs de champ électrique et magnétique qui reviennent à supposer le milieu polarisé et à le doter d'une densité de moment magnéto-électrique. Mais il ne semble pas qu'aucun d'eux soit arrivé à exprimer clairement le moment angulaire interne comme un *moment cinétique propre*, c'est-à-dire à le relier au *mouvement* de la matière. Il semble qu'il faille voir là une conséquence d'un fait signalé par Costa de Beauregard ⁽⁶⁸⁾: si on considère un petit volume $d\nu$ du fluide, son moment cinétique *propre* sera l'intégrale du moment de la quantité de mouvement par rapport à un point P contenu dans le volume $d\nu$. Il sera évidemment du cinquième ordre par rapport aux dimensions linéaires de $d\nu$ (comme un moment d'inertie). Si on divise par le volume pour obtenir une densité moyenne, on obtiendra une quantité qui sera encore du deuxième ordre, et qui sera, par conséquent, évanouissante quand on fait tendre $d\nu$ vers zéro. Il paraît donc impossible de définir une densité de moment angulaire interne. Costa de Beauregard en conclut, de façon, semble-t-il, assez inconséquente, à la nécessité de définir une telle densité par voie axiomatique, sans la relier au mouvement de rotation autrement que par des considérations de variance et d'antisymétrie. Mais il est aussi

possible d'en tirer une conclusion tout à fait différente, c'est que le passage à la limite n'est pas légitime, et que tout fluide continu à une certaine échelle se résout à une échelle plus petite en une structure discontinue. Dès lors, on peut considérer les fluides à spin comme constitués de petits corpuscules en nombre non-infini, chacun d'eux étant en rotation sur lui-même et possédant donc un moment cinétique propre fini. On considérera un volume δv non évanouissant, mais au contraire assez grand pour contenir un grand nombre de corpuscules, et on définira la densité de moment angulaire interne en divisant la somme des moments cinétiques des corpuscules par le volume δv . Dans ces conditions, le paradoxe de Costa de Beauregard, loin de démontrer le caractère contradictoire du concept de fluide à spin, vient simplement à l'appui du principe dialectique bien connu de la liaison réciproque des notions de continu et de discontinu.

C'est ce point de vue qui sera adopté dans le présent travail où on se propose essentiellement d'édifier une théorie des fluides à spin, conçus comme formés de collections discontinues de petites structures en rotation sur elles-mêmes, liées bien entendu par des interactions. C'est la conception des « fluides de toupies » développée récemment, en terme de spineurs, par Bohm, Tiomno et Schiller ⁽⁷⁰⁾ sous forme non relativiste, puis par Bohm, Vigier, Lochak et moi-même ⁽¹⁷⁾ sous forme relativiste, et qui n'a abouti, sous cette forme, qu'à l'expression du fluide « matière pure », c'est-à-dire dépourvu d'interaction. Nous éviterons, dans ce travail, le terme de « toupies » qui évoque trop précisément l'image d'un corpuscule tournant *solide*.

Nous sommes ainsi conduit à commencer par étudier les problèmes posés par la dynamique du corpuscule tournant relativiste, avant de constituer des fluides à spin avec de tels corpuscules. Et nous rencontrerons encore, mais sous forme inversée la dialectique du continu et du discontinu. En effet, les travaux classiques sur le corpuscule tournant relativiste, travaux déjà anciens pour la plupart, et que nous rappelons dans notre premier chapitre, reviennent, au fond, à affecter le corpuscule, *considéré comme ponctuel*, d'un tenseur baptisé « moment angulaire », mais qui ne peut être relié explicitement au mouvement de rotation du corpuscule, pour la bonne raison qu'un point matériel ne peut pas tourner réellement sur lui-même, son expression mathématique ne contenant pas les paramètres nécessaires pour décrire une telle rotation. Pour qu'un corps puisse être dit en rotation, il faut qu'il comporte des parties distinctes, susceptibles de tourner *les unes relativement aux autres*. Le corpuscule tournant rigoureusement ponctuel

est aussi contradictoire que le fluide à spin rigoureusement continu. Autrement dit — et tout au moins quand on a affaire à des rotations propres — le pur discontinu a aussi peu de sens physique que le continu pur. On est en présence de deux concepts opposés, mais en même temps complémentaires et impossibles à concevoir l'un sans l'autre. C'est pourquoi la dynamique classique du corpuscule tournant relativiste étudiée par Frenkel ⁽⁴⁾, Mathisson ⁽⁵⁾ et Weyssenhoff ⁽²⁾ ne représente qu'un cas particulier des diverses dynamiques possibles.

C'est pour cette raison que nous étudions et développons dans notre chapitre II la théorie générale du corpuscule relativiste tournant due à Möller ⁽¹²⁾, Pryce ⁽¹³⁾, Bohm et Vigier ⁽¹⁴⁾ et qui décrit le mouvement *global* d'une goutte de fluide classique en rotation, théorie dont nous étudions en détail quelques applications dans le chapitre III. Nous pouvons alors passer à l'étude hydrodynamique proprement dite dans nos deux derniers chapitres. Dans le chapitre IV, nous exposons la théorie axiomatique générale des fluides à spin, théorie établie simultanément et indépendamment, d'une part par Takabayasi ⁽²⁴⁾, d'autre part par Vigier, Lochak et moi-même ⁽²⁵⁾, et nous en faisons l'application à la représentation hydrodynamique de diverses équations d'onde de la mécanique quantique. Au chapitre V, enfin, nous restreignons et adaptons la théorie précédente au cas des fluides constitués par des corpuscules tournants relativistes liés par des interactions, et nous faisons quelques applications du formalisme ainsi établi. Bien qu'au début de ce travail, nous ayons cherché à étendre, comme nous l'avons dit, la dynamique du corpuscule tournant à des cas plus généraux que ceux décrits par la théorie classique de Frenkel-Weyssenhoff, nous nous en tenons, dans ce dernier chapitre, à des fluides formés par les corpuscules particuliers étudiés dans cette théorie classique. C'est dire combien peu nous pouvons prétendre à proposer une théorie complète des fluides dotés de rotation interne. Nous nous proposons, du reste, de revenir, dans des travaux ultérieurs, sur des cas que nous avons été obligé de laisser de côté pour ne pas alourdir encore un exposé déjà long.

§ 6. Structure du vide et mécanique quantique.

Malgré les références que nous faisons, à titre d'exemple, aux fonctions d'onde quantiques à la fin de notre chapitre IV, il importe de souligner que notre exposé est tout à fait indépendant des théories quantiques, et qu'il peut être considéré comme une contribution à quelques chapitres de la dynamique et de l'hydrodynamique relativistes classiques. Dans

ce domaine, il semble ouvrir la voie à l'édification de toute une série de nouvelles dynamiques du corpuscule et de nouvelle hydrodynamiques. Mais nous ne cachons pas que nous espérons surtout qu'il pourra être utilisé avec fruits pour des recherches de mécanique quantique. Aussi croyons-nous pouvoir terminer cette introduction par une esquisse rapide des perspectives ouvertes actuellement dans le cadre de l'interprétation causale.

Le point de départ essentiel nous paraît être fourni aujourd'hui par la théorie de la goutte de Bohm et Vigier. Ceux-ci aidés de Hillion et Lochak, viennent de mettre en évidence l'existence possible d'un nombre limité d'états d'excitation stables de la goutte, caractérisant chacun de façon globale l'existence d'une certaine périodicité dans l'évolution de tous les paramètres qui définissent les mouvements internes de la goutte. La classification de ces états stables de la goutte rejoint avec un accord saisissant la classification habituelle des particules élémentaires ⁽⁵¹⁾. Ce résultat ne doit naturellement pas être interprété, comme il l'aurait été il y a trente-cinq ans, comme indiquant qu'une particule élémentaire peut être représentée par une goutte de Bohm-Vigier dans un état d'excitation déterminé. Dans le cadre de l'interprétation causale, on peut considérer que ces gouttes représentent divers types de structures *subquantiques*. On supposera alors des gouttes assez petites pour qu'il en existe un très grand nombre dans un pavé d'espace de 10^{-13} cm. Ce sont de telles gouttes qui, se trouvant dans un état chaotique très violent, et liées par des interactions déterminées, constituent des milieux matériels du type « éther de Dirac », sur lesquels se propagent les ondes à singularités du niveau quantique par lesquelles l'interprétation causale décrit les particules élémentaires. Dans cette perspective, les divers types de gouttes peuvent être considérés comme les constituants subquantiques élémentaires du milieu matériel, continu au niveau quantique, qui remplit et constitue l'univers entier, servant de support aux phénomènes ondulatoires, et le fait qu'elles peuvent apparaître comme des états stables différents d'une même goutte, susceptibles en principe de se transformer les uns dans les autres, peut être rattaché à la vieille idée de l'unité de la matière, qui paraissait fort compromise ces dernières années par la multiplication des particules quantiques élémentaires.

Naturellement, la prudence scientifique oblige à ne considérer les idées énoncées ici, que comme des intuitions encore très vagues et tout à fait hypothétiques. Leur principal intérêt est de fournir un cadre à la recherche et de l'aiguiller dans une direction assez nettement déter-

minée. Leurs lignes essentielles sont certainement appelées à se préciser, peut-être même à se modifier fondamentalement à mesure que les édifices mathématiques précis auxquels elles donneront naissance feront apparaître de nouveaux problèmes et des difficultés nouvelles. Nous pensons, néanmoins, qu'il n'est pas interdit de poser quelques jalons provisoires sur cette voie.

La première étape de cette théorie devra consister nécessairement à considérer séparément chacun des états stables de la goutte de Bohm-Vigier, à étudier sa dynamique, d'abord en l'absence, puis en présence de forces extérieures, ensuite à constituer avec chacun de ces types de corpuscules un fluide relativiste en introduisant, d'une part, des interactions convenables, d'autre part, un mouvement chaotique dotant chaque corpuscule de vitesses voisines de celle de la lumière, pour réaliser une isotropie approximative conformément aux idées récentes de Dirac.

La seconde étape sera d'inscrire sur ce fluide des ondes consistant en mouvements *organisés* de faible amplitude se superposant au mouvement *chaotique* de grande amplitude, à la manière dont les ondes sonores apparaissent sur les molécules en mouvement chaotique des gaz de la théorie cinétique. Il faudra conduire le calcul et, en particulier, choisir les tensions internes introduites, de façon à retrouver comme équations de propagation des ondes sur le fluide les équations de la mécanique quantique.

La troisième étape consistera à édifier une théorie du « vide » considéré comme constitué par un mélange des différents types de corpuscules étudiés jusqu'ici séparément, avec les interactions spécifiques de chaque type, et à introduire de nouvelles interactions entre les corpuscules de types différents susceptibles de faire apparaître entre les ondes différentes les termes de couplage employés habituellement par la mécanique quantique pour traiter les corpuscules (quantiques) en interaction. Il semble que ce soit à cette étape qu'on pourra juger essentiellement de la valeur de la théorie par sa capacité à réinterpréter complètement l'ensemble des résultats de tout le formalisme linéaire de la première quantification.

La quatrième étape consistera à aborder le domaine non linéaire, c'est-à-dire à considérer des ondes à singularité sur le fluide constitué précédemment et à faire apparaître, dans la région singulière, des termes non linéaires, qui seront, dès lors, déterminés dans une large mesure par les propriétés hydrodynamiques du fluide, comme cela se passe pour les ondes de choc de la dynamique des fluides matériels. On rencontrera probablement, à cette étape, de considérables difficultés de calcul,

mais il se peut qu'on en soit récompensé par l'accès à une interprétation des forces et des structures nucléaires.

Enfin, la dernière étape sera d'essayer de comprendre comment peut se faire le passage d'un des états d'excitation stable de la goutte à l'autre, comment de tels passages peuvent se traduire sur les ondes, et comment ils peuvent rendre compte des transformations mutuelles des particules quantiques élémentaires.

On voit qu'il s'agit là d'une entreprise de longue haleine nécessitant évidemment le concours de très nombreux chercheurs. Dans le présent travail, nous avons seulement voulu donner la première ébauche d'un outil mathématique qui pourra, nous l'espérons, être de quelque utilité dans cet ordre de recherches.

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE CLASSIQUE DU CORPUSCULE TOURNANT RELATIVISTE

§ 1. Lagrangien de Frenkel.

La première formulation de la dynamique relativiste du corpuscule tournant a été donnée en 1926 par le physicien soviétique Frenkel comme théorie de l'électron doué de spin, mobile dans un champ électromagnétique⁽⁴⁾. Frenkel considère un corpuscule possédant un moment magnétique et un moment électrique et part de deux hypothèses simples :

1) Le moment magnétique $\mathbf{m}$ et le moment électrique $\mathbf{q}$ de la physique non relativiste sont en réalité des composantes différentes d'une grandeur physique relativiste unique, le *moment magnéto-électrique* $\mu_{\alpha\beta}$ qui est un tenseur antisymétrique du second ordre. Si nous nous plaçons dans un référentiel quelconque, $\mathbf{m}$ qui est, comme on le sait, un vecteur axial doit être considéré comme le dual d'espace du tenseur formé par les composantes d'espaces de $\mu_{\alpha\beta}$:

$$m_1 = \mu_{23} \quad m_2 = \mu_{31} \quad m_3 = \mu_{12}$$

ou, en utilisant les symboles complètement antisymétriques du 3^e ordre : $m_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mu_{ij}$.

On considère alors que le vecteur polaire $\mathbf{q}$ est formé par les trois autres composantes de ce même tenseur $\mu_{\alpha\beta}$: $iq_k = \mu_{k4}$.

Enfin, on suppose, conformément à l'hypothèse d'Uhlenbeck et Goudsmit, que le moment est purement magnétique ($q = 0$) dans le système propre de l'électron, ce qui s'écrit de façon covariante :

$$(I-1) \quad \mu_{\alpha\beta} u_\beta = 0$$

comme on peut le vérifier aisément. Si on considère un référentiel quel-

conque dans lequel la vitesse de l'électron est $\mathbf{v}$, on a une vitesse unitaire de composantes

$$u_i = \alpha v_i \quad \text{et} \quad u_4 = \alpha ic \quad \text{avec} \quad \alpha = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et la relation (1) s'écrit :

$$(1-2) \quad \mu_{ji} \alpha v_i + \mu_{j4} \alpha ic = 0 \quad \text{ou} \quad \mu_{ji} v_i + ic \mu_{j4} = 0.$$

Or on a $\mu_{j4} = iq_j$, et d'autre part $m_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mu_{ij}$, ce qui, contracté par ε_{imk} , donne $\mu_{im} = \varepsilon_{imk} m_k$.

En tenant compte de ces expressions, la relation (2) devient :

$$- \varepsilon_{ijk} m_k v_i - cq_j = 0$$

soit

$$\varepsilon_{jik} v_i m_k = cq_j$$

ce qui s'écrit en notation vectorielle

$$\boxed{c\mathbf{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}}$$

et entraîne évidemment

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{m} = 0.$$

Dans un référentiel quelconque, le moment électrique du corpuscule est le produit vectoriel de sa vitesse par son moment magnétique.

2) L'existence d'un moment magnéto-électrique est liée à l'existence d'un *moment angulaire interne* du corpuscule, c'est-à-dire à sa rotation sur lui-même, rotation dont les variations au cours du temps interviendront dans la dynamique. On suppose que ce moment s'exprime par un tenseur antisymétrique $S_{\alpha\beta}$ qui est relié au moment magnéto-électrique par la relation classique

$$\boxed{\mu_{\alpha\beta} = \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta}}$$

On aura ainsi pour le moment angulaire interne la *condition auxiliaire de Frenkel*

(1-3)

$$\boxed{S_{\alpha\beta} u_\beta = 0}$$

Comme $\mu_{\alpha\beta}$, le moment angulaire interne se décomposera dans chaque référentiel en deux vecteurs d'espace :

$$s_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} S_{ij} = \frac{m_0 c}{e} m_k$$

$$t_k = i S_{4k} = \frac{m_0 c}{e} q_k$$

et l'on a : $c\mathbf{t} = \mathbf{v} \times \mathbf{s}$ et $\mathbf{t} \cdot \mathbf{s} = 0$.

Si on place le corpuscule dans un champ électromagnétique représenté sous forme relativiste par le tenseur de Maxwell $F_{\alpha\beta}$, il est soumis à un couple dont l'expression relativiste s'obtient par une généralisation évidente de l'expression classique $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$ soit

$$\gamma_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\lambda} F_{\beta\lambda} - \mu_{\beta\lambda} F_{\alpha\lambda}$$

Dès lors la généralisation relativiste de la formule classique pour la dynamique des moments cinétiques donnerait :

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\lambda} F_{\beta\lambda} - \mu_{\beta\lambda} F_{\alpha\lambda}.$$

(Le point désigne la dérivation par rapport au temps propre du corpuscule ou encore la dérivation le long de la ligne d'univers décrite par le corpuscule). Ce qui, dans un référentiel quelconque, se traduirait par les deux relations à trois dimensions :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c}{e} \mathbf{m} \right) &= \mathbf{m} \times \mathbf{H} + \mathbf{q} \times \mathbf{E} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c}{e} \mathbf{q} \right) &= \mathbf{q} \times \mathbf{H} - \mathbf{m} \times \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Ces deux équations réciproques permettent en principe de déterminer toute l'évolution des vecteurs $\mathbf{m}$ et $\mathbf{q}$, connaissant la distribution des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ ainsi que les conditions initiales.

Or on voit que ces équations n'impliquent pas la condition $c\mathbf{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}$. Même si celle-ci était supposée satisfaite à l'instant initial, elle ne se maintiendrait pas en général dans la suite du mouvement. Il en résulte que si on veut s'en tenir aux hypothèses de Frenkel, une simple généralisation relativiste de la loi de la dynamique pour les moments cinétiques ne suffit pas. Le moment angulaire interne relativiste apparaît comme exprimant une réalité plus complexe que le vecteur axial de la dynamique classique.

Frenkel aborde le problème à partir d'un principe de variation d'un contenu plus général que la relation de la dynamique. Partant de l'expression classique de l'énergie de l'électron et des deux conditions auxiliaires :

$$u_\alpha u_\alpha = -c^2 \quad \text{et} \quad S_{\alpha\beta} u_\beta = 0$$

il forme le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathcal{M} (u_\alpha u_\alpha + c^2) + a_\alpha S_{\alpha\beta} u_\beta + \frac{e}{c} \varphi_\alpha u_\alpha + \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + T^*$$

Les deux coefficients $\mathcal{M}$ et a_α sont des multiplicateurs de Lagrange dont il reste à découvrir la signification. Par ailleurs on reconnaît les expres-

sions classiques de l'énergie d'un corpuscule chargé et d'un doublet dans un champ électromagnétique représenté par le tenseur de Maxwell $F_{\alpha\beta}$ ou par le potentiel d'univers φ_α (on a $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha$).

Enfin le terme T^* représente une énergie cinétique de rotation propre dont la forme reste à préciser. Outre les deux multiplicateurs $\mathcal{M}$ et a_α le système dépend de deux groupes de variables de configuration : les coordonnées x_α de la particule, avec leurs dérivées $\dot{x}_\alpha = u_\alpha$ et un groupe de variables angulaires que Frenkel représente par un symbole antisymétrique $\Omega_{[\alpha\beta]}$, avec ses dérivées $\dot{\omega}_{[\alpha\beta]} = \dot{\Omega}_{[\alpha\beta]}$ qui généralisent la notion classique de vitesse angulaire.

La question de la représentation relativiste de l'orientation d'un corps par rapport aux quatre axes de coordonnées d'un référentiel galiléen pose une série de problèmes qui ont fait l'objet de nombreux travaux récents (47, 48, 49, 50, 52). Mais, pour le moment, et du point de vue purement formel où se place Frenkel, on n'a pas à utiliser les variables $\Omega_{[\alpha\beta]}$ elles-mêmes (qui formeraient un système non-holonôme), mais seulement le tenseur infinitésimal constitué par les variations $\delta\Omega_{[\alpha\beta]}$. Ce tenseur dérive immédiatement du tenseur des vitesses angulaires relativistes $\omega_{\alpha\beta}$:

$$\delta\Omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}\delta\tau.$$

Quant à ce dernier, on le forme tout naturellement en considérant, dans un référentiel donné, le vecteur axial classique « vitesse angulaire » $\mathbf{w}$ que l'on considère comme le dual du tenseur d'espace ω_{ij} : et d'autre part, l'accélération γ du corpuscule, correspondant aux composantes de temps de $\omega_{\alpha\beta}$: $\omega_{k4} = i\gamma_k$.

La difficulté signalée plus haut provient de ce que, étant donné un tenseur $\omega_{\alpha\beta}$ obtenu de cette façon, et son évolution dans le temps, les quantités $d\Omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}d\tau$ ne sont en général pas des différentielles totales exactes. Il est donc impossible de déterminer par cette voie un système de variables angulaires relativistes holonomes caractérisant l'orientation du corpuscule relativement à un référentiel galiléen donné.

On peut alors déterminer, en généralisant une formule non-relativiste, les variations du moment angulaire interne $S_{\alpha\beta}$ en fonction de la rotation infinitésimale $\delta\Omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}\delta\tau$.

Considérons le vecteur vitesse de rotation $\mathbf{w}$ de la mécanique classique et le vecteur rotation infinitésimal $\delta\mathbf{W} = \mathbf{w}\delta t$.

Un doublet magnétique de moment magnétique $\mathbf{m}$ placé dans un champ magnétique $\mathbf{H}$ est soumis à un couple $\mathbf{m} \times \mathbf{H}$ et, au cours de la rotation $\delta\mathbf{W}$, exécute un travail $\delta\mathbf{W} (\mathbf{m} \times \mathbf{H})$. D'autre part, il possède une énergie

magnétique $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}$ qui subit une variation $\delta(-\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) = -\delta\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}$.

On a alors $\delta\mathbf{W}(\mathbf{m} \times \mathbf{H}) = -(-\delta\mathbf{m} \cdot \mathbf{H})$ ou :

$$(\delta\mathbf{W} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{H} = \delta\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}.$$

La relation entre $\delta\mathbf{m}$ et $\delta\mathbf{W}$ étant indépendante du champ, cette équation doit être vérifiée quel que soit $\mathbf{H}$. On a donc

$$\delta\mathbf{m} = \delta\mathbf{W} \times \mathbf{m}.$$

La généralisation relativiste de cette formule est immédiate. La variation du moment magnétoélectrique $\mu_{\alpha\beta}$ consécutive à une rotation infinitésimale $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ s'écrit :

$$\delta\mu_{\alpha\beta} = \delta\Omega_{\alpha\gamma}\mu_{\beta\gamma} - \delta\Omega_{\beta\gamma}\mu_{\alpha\gamma}$$

et on a de même :

$$\delta S_{\alpha\beta} = \delta\Omega_{\alpha\gamma}S_{\beta\gamma} - \delta\Omega_{\beta\gamma}S_{\alpha\gamma}$$

Reste l'énergie cinétique de rotation propre T^* . Frenkel pose axiomatiquement, et par analogie avec la dynamique classique, que sa variation δT^* est égale à $\frac{1}{2} S_{\alpha\beta} \delta\omega_{\alpha\beta}$.

C'est là un point très discutable. En effet, $S_{\alpha\beta}$ variant lors d'une rotation infinitésimale, on ne voit pas pourquoi δT^* ne comporte pas de terme en $\delta\Omega_{\alpha\beta}$. En fait l'expression de δT^* choisie n'est pas une différentielle totale exacte et il est impossible d'écrire complètement l'expression du lagrangien.

§ 2. Équations de Frenkel.

Tout au plus pourrons-nous écrire les équations d'Euler. En variant par rapport à $\mathcal{M}$ et a_α , on obtient évidemment les deux conditions auxiliaires :

$$u_\alpha u_\alpha = -c^2 \quad \text{et} \quad S_{\alpha\beta} u_\beta = 0.$$

Varions par rapport aux x_α et u_α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\lambda} &= \frac{e}{c} u_\alpha \partial_\lambda \varphi_\alpha + \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta} \partial_\lambda F_{\alpha\beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\lambda} &= \frac{e}{c} \varphi_\lambda + \mathcal{M} u_\lambda + a_\alpha S_{\alpha\lambda}. \end{aligned}$$

On a donc l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{e}{c} u_\alpha \partial_\lambda \varphi_\alpha + \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta} \partial_\lambda F_{\alpha\beta} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{e}{c} \varphi_\lambda + \mathcal{M} u_\lambda + a_\alpha S_{\alpha\lambda} \right) \\ &= \frac{e}{c} u_\alpha \partial_\lambda \varphi_\lambda + \frac{d}{d\tau} (\mathcal{M} u_\lambda + a_\alpha S_{\alpha\lambda}), \end{aligned}$$

la dérivation par rapport au temps propre s'exprimant par l'opérateur $u_\alpha \partial_\alpha$ (appendice A). On peut faire passer dans le premier membre le premier terme du second, ce qui fait apparaître le rotationnel $\partial_\lambda \varphi_\alpha - \partial_\alpha \varphi_\lambda$ qui est égal à $F_{\lambda\alpha}$:

$$\frac{d}{d\tau} (\mathbb{M} u_\lambda + a_\alpha S_{\alpha\lambda}) = \frac{e}{c} u_\alpha F_{\lambda\alpha} + \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta} \partial_\lambda F_{\alpha\beta}.$$

$$(I-4) \quad \boxed{\frac{d}{d\tau} (\mathbb{M} u_\lambda + a_\alpha S_{\alpha\lambda}) = f_\lambda + \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta} \partial_\lambda F_{\alpha\beta}}.$$

En faisant apparaître la *force de Lorentz* $f_\lambda = \frac{e}{c} F_{\lambda\alpha} u_\alpha$.

Pour un corpuscule sans spin, pour lequel les derniers termes des deux membres sont nuls, on doit retomber sur la formule classique $\frac{d}{d\tau} (m_0 u_\lambda) = f_\lambda$, ce qui montre que le multiplicateur de Lagrange $\mathbb{M}$ représente une masse propre. Nous l'écrivons

$$\mathbb{M} = m_0 + \mu$$

car, comme nous allons le voir, le spin fait apparaître une masse propre supplémentaire.

On obtient un dernier groupe d'équations d'Euler en considérant les variations $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ et $\delta\omega_{\alpha\beta}$. Les variations $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ produisent une variation :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left(\frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} F_{\gamma\lambda} + a_\gamma u_\lambda \right) \delta S_{\gamma\lambda} \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} F_{\gamma\lambda} + a_\gamma u_\lambda \right) (\delta\Omega_{\gamma\varphi} S_{\lambda\varphi} - \delta\Omega_{\lambda\varphi} S_{\gamma\varphi}) \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} F_{\alpha\lambda} + a_\alpha u_\lambda \right) S_{\lambda\beta} \delta\Omega_{\alpha\beta} - \left(\frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} F_{\lambda\alpha} + a_\lambda u_\alpha \right) S_{\lambda\beta} \delta\Omega_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Le terme en $u_\lambda S_{\lambda\beta}$ est nul d'après (3). Quant au terme $-a_\lambda u_\alpha S_{\lambda\beta} \delta\Omega_{\alpha\beta}$ il peut aussi s'écrire, en raison de l'antisymétrie de $\delta\Omega_{\alpha\beta}$:

$$+ a_\lambda u_\beta S_{\lambda\alpha} \delta\Omega_{\alpha\beta} \quad \text{ou} \quad - \frac{1}{2} (a_\lambda u_\alpha S_{\lambda\beta} - a_\lambda u_\beta S_{\lambda\alpha}) \delta\Omega_{\alpha\beta}.$$

Pour la même raison, les deux autres termes $\frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} (F_{\alpha\lambda} S_{\lambda\beta} - F_{\lambda\alpha} S_{\lambda\beta}) \delta\Omega_{\alpha\beta}$ s'écrivent :

$$- \frac{e}{m_0 c} F_{\lambda\alpha} S_{\lambda\beta} \delta\Omega_{\alpha\beta} = - \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} (F_{\lambda\alpha} S_{\lambda\beta} - F_{\lambda\beta} S_{\lambda\alpha}) \delta\Omega_{\alpha\beta}.$$

On a donc finalement :

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Omega_{\alpha\beta}} = - \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} (F_{\lambda\alpha} S_{\lambda\beta} - F_{\lambda\beta} S_{\lambda\alpha}) - \frac{1}{2} a_\lambda (u_\alpha S_{\lambda\beta} - u_\beta S_{\lambda\alpha}).$$

Enfin il reste

$$\frac{\partial f}{\partial u_{\alpha\beta}} = \frac{\partial T^*}{\partial u_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}.$$

On a donc l'équation :

$$(I-5) \quad \dot{S}_{\alpha\beta} = - \frac{e}{m_0 c} (F_{\lambda\alpha} S_{\lambda\beta} - F_{\lambda\beta} S_{\lambda\alpha}) - a_\lambda (u_\alpha S_{\lambda\beta} - u_\beta S_{\lambda\alpha}).$$

Pour préciser la signification de a_λ , contractons cette équation par u_β , ce qui fait disparaître les termes en $S_{\lambda\beta}$:

$$\dot{S}_{\alpha\beta} u_\beta = \frac{e}{m_0 c} F_{\lambda\beta} u_\beta S_{\lambda\alpha} - c^2 a_\lambda S_{\lambda\alpha}.$$

Ou, comme d'après (3) $\dot{S}_{\alpha\beta} u_\beta = -S_{\alpha\beta} \dot{u}_\beta = S_{\lambda\alpha} \dot{u}_\lambda$, et en introduisant la force de Lorentz $f_\lambda = \frac{e}{c} F_{\lambda\beta} u_\beta$:

$$S_{\lambda\alpha} (-\dot{u}_\lambda - c^2 a_\lambda + \frac{1}{m_0} f_\lambda) = 0.$$

Cette équation est vérifiée quel que soit $S_{\lambda\alpha}$, si on pose :

$$c^2 a_\lambda = -\dot{u}_\lambda + \frac{1}{m_0} f_\lambda$$

Si le corpuscule n'avait pas de spin, on aurait la relation

$$m_0 \dot{u}_\lambda = f_\lambda \quad \text{soit} \quad a_\lambda = 0.$$

On voit que la présence du spin entraîne une diminution de l'accélération par rapport au cas du corpuscule sans spin. L'expression $m_0 c^2 a_\lambda$ représente alors l'excès de la force de Lorentz par rapport à la dérivée $m_0 \dot{u}_\lambda$ de l'impulsion.

Sur l'expression $c^2 a_\lambda = -\dot{u}_\lambda + \frac{e}{m_0 c} F_{\lambda\beta} u_\beta$ on remarque que : $a_\lambda u_\lambda = 0$.

Le vecteur a_λ est dans l'espace propre.

Transformons le premier groupe d'équations en tenant compte de l'expression de $\mathcal{M}$:

$$(m_0 + \mu) \dot{u}_\lambda + \dot{\mu} u_\lambda + a_\alpha \dot{S}_{\alpha\lambda} + \dot{a}_\alpha S_{\alpha\lambda} = f_\lambda + \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta} \partial_\lambda F_{\alpha\beta}.$$

Or on a $f_\lambda = m_0 c^2 a_\lambda + m_0 \dot{u}_\lambda$, d'où :

$$\mu \dot{u}_\lambda + \dot{\mu} u_\lambda + a_\alpha \dot{S}_{\alpha\lambda} + \dot{a}_\alpha S_{\alpha\lambda} = m_0 c^2 a_\lambda + \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta} \partial_\lambda F_{\alpha\beta}.$$

Contractons par u_λ . Il ne reste que :

$$-\dot{\mu}c^2 + a_\alpha u_\lambda \dot{S}_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta} u_\lambda \partial_\lambda F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{m_0 c}{e} S_{\alpha\beta} \dot{F}_{\alpha\beta}$$

ce qu'on transforme aisément en :

$$(I-6) \quad -\dot{\mu}c^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} \frac{d}{d\tau} (S_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} \dot{S}_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - a_\alpha u_\beta \dot{S}_{\alpha\beta}$$

en raison de l'antisymétrie de $\dot{S}_{\alpha\beta}$.

On peut montrer que le second terme est nul.

Pour cela reprenons l'équation (5) :

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = S_{\lambda\alpha} \left(\frac{e}{m_0 c} F_{\lambda\beta} + a_\lambda u_\beta \right) - S_{\lambda\beta} \left(\frac{e}{m_0 c} F_{\lambda\alpha} + a_\lambda u_\alpha \right)$$

ajoutons les deux termes nuls : $S_{\lambda\beta} a_\alpha u_\lambda - S_{\lambda\alpha} a_\beta u_\lambda$.

Il vient, en introduisant le tenseur $F'_{\lambda\beta} = F_{\lambda\beta} + \frac{m_0 c}{e} (a_\lambda u_\beta - a_\beta u_\lambda)$ qui est antisymétrique comme $F_{\lambda\beta}$:

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = \frac{e}{m_0 c} (S_{\lambda\alpha} F'_{\lambda\beta} - S_{\lambda\beta} F'_{\lambda\alpha})$$

forme condensée de l'équation (5).

Mais le second terme de (6) prend la forme

$$-\frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} (S_{\lambda\alpha} F'_{\lambda\beta} - S_{\lambda\beta} F'_{\lambda\alpha}) \frac{e}{m_0 c} F'_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left(\frac{e}{m_0 c} \right)^2 (S_{\lambda\alpha} F'_{\lambda\beta} + S_{\lambda\alpha} F'_{\lambda\beta}) F'_{\alpha\beta}$$

à cause de l'antisymétrie de $F'_{\alpha\beta}$.

Soit : $-\left(\frac{e}{m_0 c} \right)^2 S_{\lambda\alpha} F'_{\lambda\beta} F'_{\alpha\beta} = 0$ à cause de l'antisymétrie de $S_{\lambda\alpha}$.

On a donc en définitive :

$$\dot{\mu}c^2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (S_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) \frac{e}{m_0 c}.$$

Et comme μ , supplément de masse dû au spin, s'annule évidemment avec $S_{\alpha\beta}$, on peut poser

$$\boxed{\mu c^2 = -\frac{1}{2} S_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \frac{e}{m_0 c} = -\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}}$$

ce qui représente, comme il est naturel, l'énergie du doublet dans le champ électromagnétique.

Nous allons maintenant donner aux équations de Frenkel une forme

que nous retrouverons fréquemment par la suite. Si on considère l'équation (4) comme généralisant le théorème classique de l'impulsion, la quantité $(m_0 + \mu) u_\lambda - S_{\lambda\alpha} a_\alpha$ représente l'impulsion généralisée G_λ de la particule. On voit qu'elle se compose de deux termes. Le premier, compte tenu de la masse supplémentaire apportée par l'énergie électromagnétique du doublet, est une impulsion classique colinéaire à la vitesse unitaire. Le second que nous écrirons

$$-S_{\lambda\alpha} a_\alpha = -P_\lambda$$

représente une impulsion supplémentaire que nous appellerons *impulsion transversale* car elle est orthogonale à la vitesse unitaire: $P_\lambda u_\lambda = 0$.

Elle se trouve dans l'espace propre de la particule qui possède ainsi une impulsion résiduelle dans le système d'axes relativement auquel elle est au repos. L'impulsion transversale se compose à son tour de deux termes qui apparaissent si on explicite a_α : Un terme purement mécanique $-\frac{1}{c^2} S_{\lambda\alpha} \dot{u}_\alpha$ et un terme lié au champ électro-magnétique $\frac{1}{m_0 c^2} S_{\lambda\alpha} f_\alpha$.

On a ainsi:

$$P_\lambda = -\frac{1}{c^2} S_{\lambda\alpha} \dot{u}_\alpha + \frac{1}{m_0 c^2} S_{\lambda\alpha} f_\alpha \quad G_\lambda = (m_0 + \mu) u_\lambda - P_\lambda$$

L'équation (4) devient

$$\dot{G}_\lambda = f_\lambda + \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta} \partial_\lambda F_{\alpha\beta}.$$

De même, dans l'équation (5) on voit apparaître le terme

$$-a_\lambda (u_\alpha S_{\lambda\beta} - u_\beta S_{\lambda\alpha})$$

qui prend la forme $u_\alpha P_\beta - u_\beta P_\alpha$ ou encore $G_\alpha u_\beta - G_\beta u_\alpha$, expression dans laquelle la partie de G_α colinéaire au courant disparaît. On a donc:

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = G_\alpha u_\beta - G_\beta u_\alpha + \frac{e}{m_0 c} (S_{\alpha\lambda} F_{\beta\lambda} - S_{\beta\lambda} F_{\alpha\lambda})$$

En particulier, en l'absence de champ électromagnétique, ces équations deviennent

$$\begin{array}{ll} G_\lambda = m_0 u_\lambda - P_\lambda & P_\lambda = -\frac{1}{c^2} S_{\lambda\alpha} \dot{u}_\alpha \\ \dot{G}_\lambda = 0 & \dot{S}_{\alpha\beta} = G_\alpha u_\beta - G_\beta u_\alpha \end{array}$$

§ 3. Théorie de Mathisson : formalisme.

Le Théoricien polonais Mathisson a rencontré le problème de l'électron tournant au cours de travaux qui ont fait l'objet d'une série de publications entre 1930 et 1937 ⁽⁵⁾ et où est développé un point de vue qui devait par la suite se révéler d'une extrême fécondité dans les développements récents de la Relativité Générale ^(6, 63, 34) et de l'interprétation causale de la Mécanique quantique ^(7, 11, 30). La présence de la matière dans un champ extérieur — et sa nature même — se traduit par la superposition au champ régulier, d'un champ supplémentaire obéissant aux mêmes équations de champ, mais comportant des *singularités* le long d'une certaine ligne d'univers $\mathcal{L}$. Le caractère non linéaire des équations de champ — qui sont celles de la Relativité Générale — entraîne des conditions restrictives pour que la solution singulière et la solution régulière soient superposables. Ces conditions, qui portent sur la ligne d'univers $\mathcal{L}$, se présentent comme des lois de mouvement pour la particule matérielle. Le point le plus intéressant est l'emploi par Mathisson d'une méthode d'approximations successives qui aboutit en première approximation à réduire un petit corps matériel au point matériel de la dynamique newtonienne, mais qui fournit, comme deuxième approximation, un autre type de singularité dotée d'un moment angulaire interne et d'une dynamique non-classique, où nous retrouverons les lois données par Frenkel.

Nous exposerons cette théorie en faisant abstraction du champ de gravitation extérieur qui complique beaucoup les calculs chez Mathisson, et que nous n'avons aucun intérêt à considérer.

En l'absence de matière, nous aurons donc un univers vide doté d'une « métrique de base » euclidienne, que nous rapporterons à des axes galiléens, le tenseur métrique étant alors simplement $\delta_{\mu\nu}$. La présence d'une gouttelette matérielle qui parcourt un certain tube d'univers très étroit, se traduit, dans tout l'univers *extérieur au tube*, par l'adjonction d'un tenseur métrique supplémentaire $\gamma_{\mu\nu}$ que nous supposons petit devant $\delta_{\mu\nu}$ et dont nous négligerons les puissances supérieures à 1. On sait que le tenseur métrique total $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$ obéit en tout point du vide à l'équation d'Einstein ⁽⁴⁴⁾ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - 2\chi T_{\mu\nu}$$

($T_{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie-impulsion électromagnétique). On sait aussi que cette équation se traduit en première approximation par l'équation

linéaire

$$(I-7) \quad \square \psi_{\mu\nu} = -2\chi T_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad \psi_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma^\lambda_\lambda$$

et moyennant la condition auxiliaire

$$(I-8) \quad \nabla_\nu \psi^\nu_\mu = 0.$$

Les symboles $\square$ et ∇ , ainsi que les opérations d'élévation et d'abaissement des indices s'expriment dans le cadre de la métrique euclidienne de base. On restera en axes galiléens et on pourra conserver le formalisme de la relativité restreinte. On considérera directement le tenseur $\psi_{\mu\nu}$ qu'on appelle potentiel de gravitation. Le problème est de trouver des solutions du système (7) (8) qui comportent des singularités susceptibles de caractériser plus ou moins complètement la gouttelette matérielle.

Pour cela on considère une ligne d'univers $\mathcal{L}$ intérieure au tube parcouru par la goutte, et on établit, au moyen des potentiels retardés, une correspondance entre les points A de $\mathcal{L}$ et tous les points O de l'univers.

Considérons le cône de lumière de sommet O. Sa nappe « passée » rencontre nécessairement $\mathcal{L}$ en un point bien déterminé A que l'on fera correspondre au point O. Cela revient somme toute à ce que le point A qui parcourt la ligne d'univers $\mathcal{L}$ lance à chaque instant de son mouvement des signaux électromagnétiques dans l'espace, et relie ainsi cet instant à un instant bien déterminé en chaque point de l'espace. Si nous choisissons sur $\mathcal{L}$ un point P comme instant initial, tout arc $PA = s$ définira un temps propre τ , temps propre qu'on pourra ainsi affecter à tous les points d'univers O dont le cône de lumière contient A. La détermination d'un temps propre le long de la ligne $\mathcal{L}$ définit donc en même temps en tout point O un champ scalaire $\tau(0)$. De même toute grandeur $f(\tau)$ ou $f_\mu(\tau)$ attachée au point A permet de définir un champ $f(0)$ ou $f_\mu(0)$ en tout point de l'univers. On peut ainsi attacher en tout point O un vecteur déterminé $u_\mu(0)$ qui est la vitesse unitaire $u_\mu(\tau)$ du point A de $\mathcal{L}$ qui est associé à O.

On convient également d'associer à chaque point O un vecteur l_μ qui est simplement la génératrice OA du cône de lumière et qui est ainsi un vecteur isotrope :

$$(I-9) \quad l_\mu l_\mu = 0$$

Enfin les deux champs u_μ et l_μ permettent de définir un champ

Le point A se déplaçant sur la ligne $\mathcal{L}$ on peut écrire

$$(l_\mu \delta X_\mu)_A = l_\mu u_\mu d\tau = -cr d\tau.$$

Et d'autre part $(l_\mu \delta X_\mu)_0 = l_\mu dx_\mu$.

Au déplacement dx_μ du point O correspond la variation $d\tau$ du scalaire τ et on a donc

$$\frac{d\tau}{dx_\mu} = \partial_\mu \tau = -\frac{l_\mu}{cr}$$

ce qui est le gradient cherché du champ scalaire τ . On a de même, pour toute grandeur attachée au point A et définissant un champ au point O, soit $f(\tau)$

$$(I-11) \quad \partial_\mu f(\tau) = -f' \frac{l_\mu}{cr} \quad \text{avec} \quad f' = \frac{df}{d\tau}.$$

Par exemple pour u_μ :

$$\partial_\mu u_\nu = -\dot{u}_\nu \frac{l_\mu}{cr}.$$

On obtient facilement le gradient du champ l_μ en remarquant que, lors de la variation précédente, la variation δl_μ est simplement :

$$\delta l_\mu = \delta a_\mu - \delta x_\mu = u_\mu \delta\tau - \delta x_\mu = u_\mu \left(-\frac{l_\nu}{cr} \right) \delta x_\nu - \delta x_\mu.$$

D'où

$$(I-12) \quad \partial_\nu l_\mu = -\delta_{\mu\nu} - \frac{l_\nu u_\mu}{cr}.$$

Enfin, on a pour le scalaire $r = -\frac{l_\nu u_\nu}{c}$:

$$\partial_\mu r = -\frac{1}{c} (u_\nu \partial_\mu l_\nu + l_\nu \partial_\mu u_\nu)$$

soit

$$(I-13) \quad \partial_\mu r = \frac{1}{c} \left[u_\mu + \frac{l_\mu}{cr} (l_\nu \dot{u}_\nu - c^2) \right].$$

§ 4. Théorie de Mathisson : cas unipolaire.

Ceci dit, il résulte des hypothèses que tout potentiel

$$\psi(x_\mu) = \frac{f(\tau)}{r}$$

engendré par une fonction quelconque $f(\tau)$ obéit en tout point non situé sur $\mathcal{L}$ à l'équation de Laplace

$$\square \psi = 0.$$

On le démontre facilement en exprimant $\partial_\mu \partial_\mu \psi$ au moyen des formules (11) et (13), et en tenant compte de (9) et (10). Mais cela ressort directement du fait que, par sa définition, ψ est un potentiel retardé qui se propage comme une onde électromagnétique. Toute fonction $f(\tau)$ attachée au point A permet donc de former une solution de l'équation de Laplace possédant sur $\mathcal{L}$ une ligne singulière du premier ordre.

En particulier, nous pouvons utiliser de telles solutions pour résoudre l'équation d'Einstein en l'absence de champ électromagnétique :

$$\square \psi_{\mu\nu} = 0 .$$

Mais il faudra que les solutions satisfassent aussi à la condition auxiliaire

$$\partial_\mu \psi_{\mu\nu} = 0$$

(nous revenons aux notations de la relativité restreinte). On peut remarquer que l'équation approchée $\square \psi_{\mu\nu} = 0$ est linéaire. Mais le caractère non linéaire de l'équation exacte laisse, pour ainsi dire, une trace sous forme de la condition $\partial_\mu \psi_{\mu\nu} = 0$.

Dans le cadre des idées rappelées plus haut, c'est bien cette condition qui, restreignant la généralité de la ligne d'univers $\mathcal{L}$, se traduira par des équations de mouvement. Il convient aussi de rappeler qu'au fond cette condition revient, moins à imposer une restriction au champ $\psi_{\mu\nu}$ qu'à déterminer en chaque point un système particulier de coordonnées dans lequel l'équation approchée soit linéaire ⁽¹⁰⁾.

Nous considérons en A un tenseur $m_{\mu\nu}(\tau)$ symétrique et nous formons le potentiel

$$\psi_{\mu\nu}(x_a) = \frac{m_{\mu\nu}(\tau)}{r} .$$

Calculons la divergence $z_\nu = \partial_\mu \psi_{\mu\nu}$.

Il vient, en employant les relations que nous venons d'établir :

$$z_\nu = -\frac{1}{r} \frac{l_\mu}{r} \left(\frac{\dot{m}_{\mu\nu}}{c} + \frac{m_{\mu\nu}}{c^2} \frac{l_\lambda}{r} \dot{u}_\lambda \right) - \frac{1}{r^2} m_{\mu\nu} \left(\frac{u_\mu}{c} - \frac{l_\mu}{r} \right) .$$

Nous avons mis en évidence le rapport $\frac{l_\mu}{r}$ qui reste fini quand on se rapproche de $\mathcal{L}$, et, ceci fait, nous avons ordonné suivant les puissances de $\frac{1}{r}$. En multipliant certains facteurs par $-\frac{l_\lambda u_\lambda}{cr} = 1$, on obtient :

$$z_\nu = -\frac{1}{r} \frac{l_\mu}{r} \frac{l_\lambda}{r} \frac{1}{c^2} (m_{\mu\nu} \dot{u}_\lambda - \dot{m}_{\mu\nu} u_\lambda) + \frac{1}{r^2} \frac{l_\lambda}{r} \frac{1}{c^2} (m_{\mu\nu} u_\mu u_\lambda + c^2 m_{\lambda\nu}) .$$

Si l'on veut avoir $z_v = 0$ pour toute valeur de $\frac{1}{r}$ et de $\frac{l_\mu}{r}$, on doit avoir séparément :

$$(I-14) \quad m_{\mu\nu} u_\mu u_\lambda + c^2 m_{\lambda\nu} = 0$$

$$(I-15) \quad m_{\mu\nu} \dot{u}_\lambda - \dot{m}_{\mu\nu} u_\lambda = 0.$$

L'équation (14) projetée sur le système propre ($u_j = 0$) donne simplement

$$m_{jk} = 0 \quad \text{et} \quad m_{i4} = 0.$$

Le tenseur $m_{\mu\nu}$ ne comporte dans le système propre que des composantes purement temporelles. Il est obligatoirement de la forme

$$\boxed{m_{\mu\nu} = \mathcal{M} u_\mu u_\nu} \quad (\mathcal{M} \text{ est un scalaire}).$$

L'équation (15) contractée par u_λ donne : $\dot{m}_{\mu\nu} = 0$

soit
$$\mathcal{M} \dot{u}_\mu u_\nu + \mathcal{M} \dot{u}_\mu u_\nu + \mathcal{M} u_\mu \dot{u}_\nu = 0.$$

En contractant par u_ν il reste

$$(I-16) \quad \mathcal{M} \dot{u}_\mu + \mathcal{M} \dot{u}_\mu = 0.$$

Enfin, en contractant par u_μ :

$$\mathcal{M} = 0 \quad \boxed{\mathcal{M} = \text{constante}}.$$

L'équation (16) devient alors

$$\mathcal{M} \dot{u}_\mu = 0 \quad \boxed{\dot{u}_\mu = 0}.$$

C'est une condition qui porte sur la ligne $\mathcal{L}$ et qui impose au point A de décrire un *mouvement rectiligne et uniforme*.

Pour interpréter physiquement ce résultat, reportons-nous à la méthode employée par la théorie dualiste ordinaire qui considère la matière comme un corps étranger évoluant dans l'univers et y créant un champ de gravitation. On sait que le potentiel de gravitation en O se calcule au moyen des potentiels retardés par l'intégrale :

$$\Phi_{\mu\nu} = \frac{K}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(t - r/c)}{r} d\nu.$$

L'intégrale étant étendue à tout l'espace, et t étant le temps auquel on considère le point O. En fait l'emploi de $T_{\mu\nu}(t - r/c)$ signifie que

l'intégrale est étendue à une multiplicité tridimensionnelle constituée précisément par la nappe « passée » du côté de lumière de sommet O. En l'absence de champ électromagnétique, $T_{\mu\nu}$ est nul en tout point, sauf à l'intérieur du tube d'univers balayé par la matière. Nous pouvons, avec Lubanski ⁽⁸⁾, faire les hypothèses suivantes :

1) On se place dans le cas « matière pure » où l'expression du tenseur d'énergie-impulsion à l'intérieur du tube est

$$T_{\mu\nu} = \rho m_0 u_\mu u_\nu.$$

2) On néglige les accélérations. On peut alors remplacer la vitesse de chaque point matériel P considéré sur le cône de lumière Σ par la vitesse qu'il possède à la traversée de l'hyperplan d'espace propre Σ' relatif au point A, intersection de Σ et de la ligne d'univers $\mathcal{L}$. On peut alors prendre l'intégrale sur le volume V_0 de la gouttelette relatif au système propre du point A.

Ces hypothèses permettent de considérer le tenseur $T_{\mu\nu} = \rho m_0 u_\mu u_\nu$ à l'instant $t = \frac{r_0}{c}$ qui caractérise le point A. D'où, en développant $\frac{1}{r}$ en série :

$$\frac{1}{r} T_{\mu\nu} = \rho m_0 u_\mu u_\nu \cdot \frac{1}{r_0} + \rho m_0 u_\mu u_\nu \delta_\lambda \left(\frac{1}{r} \right)_0 y_\lambda + \dots$$

y_λ étant les coordonnées du point considéré *par rapport au point A pris comme origine*. Ou enfin, en constituant la goutte par un ensemble de points discrets de masses m_0 :

$$\Phi_{\mu\nu} = \frac{K}{2\pi} \frac{1}{r_0} \sum m_0 u_\mu u_\nu + \frac{K}{2\pi} \delta_\lambda \left(\frac{1}{r} \right)_0 \sum m_0 y_\lambda u_\mu u_\nu + \dots$$

Si nous supposons que le point A qui décrit $\mathcal{L}$ est le *centre de gravité de la goutte*, on a

$$\sum m_0 y_\lambda = 0$$

d'où en particulier, pour la composante de temps pure dans le système propre de A :

$$\Phi_{44} = - \frac{K}{2\pi} \frac{1}{r_0} c^2 \sum m_0 + \text{termes d'ordre supérieur à 1 en } y_\lambda.$$

On peut évidemment identifier ce résultat avec celui que nous avons obtenu tout à l'heure :

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{\mathcal{M} u_\mu u_\nu}{r} \quad \text{donne} \quad \psi_{44} = - \frac{\mathcal{M} c^2}{r}$$

ce qui permet d'identifier la constante $\mathfrak{M}$ avec la quantité $\frac{K}{2\pi} \Sigma m_0$ également constante.

En définitive, on peut, en première approximation, identifier une goutte matérielle en mouvement en l'absence de champ électromagnétique avec une singularité ponctuelle du champ de gravitation localisée au centre de gravité de la goutte et animée comme lui d'un mouvement rectiligne et uniforme. Cette singularité sera de la forme

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{\mathfrak{M} u_\mu u_\nu}{r}$$

la constante $\mathfrak{M}$ étant, à un facteur près, la masse totale de la goutte.

§ 5. Théorie de Mathisson : cas dipolaire.

Passons maintenant à un degré supérieur d'approximation. On obtient une autre solution de l'équation de Laplace en superposant à une solution du type précédent, une solution de type $\partial_\lambda \left(\frac{m_{\mu\nu\lambda}}{r} \right)$ où $m_{\mu\nu\lambda}$ est un tenseur attaché au point A et symétrique en μ et ν . Le champ ainsi engendré dans tout l'univers obéira évidemment à l'équation :

$$\square \partial_\lambda \left(\frac{m_{\mu\nu\lambda}}{r} \right) = \partial_\lambda \square \left(\frac{m_{\mu\nu\lambda}}{r} \right) = 0$$

et pour $\psi_{\mu\nu} = \frac{m_{\mu\nu}}{r} + \partial_\lambda \left(\frac{m_{\mu\nu\lambda}}{r} \right)$ on aura de même :

$$\square \psi_{\mu\nu} = 0.$$

Il reste à voir quelles restrictions va entraîner la condition auxiliaire $\partial_\mu \psi_{\mu\nu} = 0$.

En appliquant les relations de Mathisson, nous calculons $z_\nu = \partial_\mu \psi_{\mu\nu}$ on a :

$$\partial_\alpha \left(\frac{m_{\mu\nu\alpha}}{r} \right) = -\frac{1}{cr^2} \left\{ \dot{m}_{\mu\nu\alpha} l_\alpha + m_{\mu\nu\alpha} \left[u_\alpha + \frac{l_\alpha}{cr} (l_\beta \dot{u}_\beta - c^2) \right] \right\}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \partial_\alpha \left(\frac{m_{\mu\nu\alpha}}{r} \right) = \\ & -\frac{1}{cr^2} \left\{ -\dot{m}_{\mu\nu\alpha} \frac{l_\mu l_\alpha}{cr} - \dot{m}_{\mu\nu\alpha} \left(\delta_{\mu\alpha} + \frac{l_\mu l_\alpha}{cr} \right) \right. \\ & - \dot{m}_{\mu\nu\alpha} \frac{l_\mu}{cr} \left[u_\alpha + \frac{l_\alpha}{cr} (l_\beta \dot{u}_\beta - c^2) \right] - m_{\mu\nu\alpha} \dot{u}_\alpha \frac{l_\mu}{cr} \\ & + m_{\mu\nu\alpha} \frac{r}{cr^2} \left[-\left(\delta_{\mu\alpha} + \frac{l_\mu l_\alpha}{cr} \right) (l_\beta \dot{u}_\beta - c^2) - l_\alpha \left(\dot{u}_\mu + \frac{l_\mu}{cr} l_\beta \dot{u}_\beta \right) \right. \\ & \left. - m_{\mu\nu\alpha} \frac{1}{c^2 r^2} \left[u_\mu + \frac{l_\mu}{cr} (l_\gamma \dot{u}_\gamma - c^2) \right] l_\alpha (l_\beta \dot{u}_\beta - c^2) \right\} \\ & + \frac{2}{c^2 r^3} \left[u_\mu + \frac{l_\mu}{cr} (l_\gamma \dot{u}_\gamma - c^2) \right] \left\{ \dot{m}_{\mu\nu\alpha} l_\alpha + m_{\mu\nu\alpha} \left[u_\alpha + \frac{l_\alpha}{cr} (l_\beta \dot{u}_\beta - c^2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

De même on a :

$$\partial_\mu \left(\frac{m_{\mu\nu}}{r} \right) = -\frac{1}{cr^2} \left\{ \dot{m}_{\mu\nu} l_\mu + m_{\mu\nu} \left[u_\mu + \frac{l_\mu}{cr} (l_\alpha \dot{u}_\alpha - c^2) \right] \right\}$$

Comme plus haut, ordonnons suivant les puissances de $\frac{1}{r}$ après avoir divisé chaque l_μ par r , de façon à obtenir un vecteur $\lambda_\mu = \frac{l_\mu}{r}$ qui reste fini quand r tend vers 0. Tous calculs faits, z_ν se compose de termes en $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r}$. Si on veut que la condition $z_\nu = 0$ soit satisfaite quels que soient r et λ_μ , les coefficients de ces trois termes doivent s'annuler séparément.

On a pour le terme en $\frac{1}{r^3}$ un coefficient :

$$A_\nu = -\frac{m_{\mu\nu\alpha}}{c^2} [-2u_\mu u_\alpha + 3c(\lambda_\mu u_\alpha + \lambda_\alpha u_\mu) + c^2(\delta_{\mu\alpha} - 3\lambda_\mu \lambda_\alpha)] = 0.$$

Pour le terme en $\frac{1}{r^2}$:

$$\begin{aligned} B_\nu = -\frac{m_{\mu\nu\alpha}}{c} \left\{ -\frac{\lambda_\beta \dot{u}_\beta}{c^2} [3(u_\mu \lambda_\alpha + u_\alpha \lambda_\mu) + c(\delta_{\mu\alpha} - 6\lambda_\mu \lambda_\alpha)] - \frac{1}{c} (\lambda_\mu \dot{u}_\alpha + \lambda_\alpha \dot{u}_\mu) \right\} \\ + \frac{\dot{m}_{\mu\nu\alpha}}{c} \left[\delta_{\mu\alpha} - 3\lambda_\mu \lambda_\alpha + \frac{2}{c} (\lambda_\mu \dot{u}_\alpha + \lambda_\alpha \dot{u}_\mu) \right] \\ + \frac{m_{\mu\nu\alpha}}{c^2} \lambda_\alpha (u_\mu \dot{u}_\alpha + c^2 \delta_{\mu\alpha}) = 0. \end{aligned}$$

Pour le terme en $\frac{1}{r}$:

$$\begin{aligned} C_\nu = \frac{\dot{m}_{\mu\nu\alpha}}{c^2} \lambda_\mu \lambda_\alpha + 3 \frac{\dot{m}_{\mu\nu\alpha}}{c^3} \lambda_\beta \dot{u}_\beta \lambda_\mu \lambda_\alpha \\ + \frac{m_{\mu\nu\alpha}}{c^4} \lambda_\mu \lambda_\alpha [3(\lambda_\beta \dot{u}_\beta)^2 + c\lambda_\beta \ddot{u}_\beta] \\ - \frac{\dot{m}_{\mu\nu}}{c} \lambda_\mu - \frac{m_{\mu\nu}}{c^2} \lambda_\mu \lambda_\alpha \dot{u}_\alpha = 0. \end{aligned}$$

L'élaboration de ces trois conditions est passablement plus compliquée que dans le cas d'une singularité unipolaire. Lubanski (8) décompose le tenseur $m_{\mu\nu\alpha}$ en composantes sur les axes propres. On peut toujours écrire :

$$\begin{aligned} m_{\mu\nu\alpha} \equiv {}^*m_{\mu\nu\alpha} + S_{\alpha\mu} u_\nu + S_{\alpha\nu} u_\mu + q_{\mu\nu} u_\alpha \\ + n_\alpha u_\mu u_\nu + w_\mu u_\nu u_\alpha + w_\nu u_\mu u_\alpha + f u_\mu u_\nu u_\alpha. \end{aligned}$$

Les tenseurs introduits étant tous orthogonaux à u_μ :

$$\begin{aligned} *m_{\mu\nu\alpha}u_\mu &= *m_{\mu\nu\alpha}u_\nu = *m_{\mu\nu\alpha}u_\alpha = 0 \\ S_{\alpha\mu}u_\alpha &= S_{\alpha\mu}u_\mu = 0 \\ q_{\mu\nu}u_\mu &= q_{\mu\nu}u_\nu = 0 \\ n_\alpha u_\alpha &= w_\alpha u_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Naturellement $*m_{\mu\nu\alpha}$ et $q_{\mu\nu}$ sont symétriques en μ et ν .

En contractant plusieurs fois par la vitesse unitaire, on voit que cette décomposition est toujours possible, et qu'elle est unique. D'autre part, l'application des relations de Mathisson permet de démontrer une identité importante qui simplifie la décomposition : Pour tout tenseur en A comportant u_α en facteur, on a :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left(\frac{fu_\alpha}{r} \right) &= \frac{1}{r^2} \left\{ r \left(-\frac{\dot{f}l_\alpha}{cr} u_\alpha - f \frac{\dot{u}_\alpha l_\alpha}{cr} \right) - \frac{1}{c} \left[u_\alpha + \frac{l_\alpha}{cr} (l_\beta \dot{u}_\beta - c^2) \right] fu_\alpha \right\} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[r\dot{f} - \frac{f}{c} \dot{u}_\alpha l_\alpha + fc + \frac{f}{c} (l_\beta \dot{u}_\beta - c^2) \right] \end{aligned}$$

ou finalement :

$$(I-17) \quad \boxed{\partial_\alpha \left(\frac{fu_\alpha}{r} \right) = \frac{\dot{f}}{r}}$$

Ainsi dans l'expression du potentiel « dipolaire » $\partial_\alpha \left(\frac{m_{\mu\nu\alpha}}{r} \right)$ on pourra appliquer cette relation aux termes

$$\partial_\alpha \left(\frac{q_{\mu\nu}u_\alpha}{r} \right), \quad \partial_\alpha \left(\frac{w_\mu u_\alpha u_\nu + w_\nu u_\alpha u_\mu}{r} \right), \quad \partial_\alpha \left(\frac{fu_\mu u_\nu u_\alpha}{r} \right)$$

qui donneront respectivement :

$$\frac{\dot{q}_{\mu\nu}}{r}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{d\tau} (w_\mu u_\nu + w_\nu u_\mu), \quad \frac{1}{r} \frac{d}{d\tau} (fu_\mu u_\nu)$$

Ils sont de la même forme que le terme unipolaire $\frac{m_{\mu\nu}}{r}$ et peuvent lui être incorporés sans restreindre la généralité. On se contentera donc de :

$$(I-18) \quad m_{\mu\nu\alpha} \equiv *m_{\mu\nu\alpha} + S_{\alpha\mu}u_\nu + S_{\alpha\nu}u_\mu + n_\alpha u_\mu u_\nu.$$

Ceci dit, la première condition $A_\nu = 0$ s'écrit :

$$m_{\mu\nu\alpha} [-2u_\mu u_\alpha + 3c(\lambda_\mu u_\alpha + \lambda_\alpha u_\mu) + c^2(\delta_{\mu\alpha} - 3\lambda_\mu \lambda_\alpha)] = 0$$

Mais on voit que la quantité entre crochets s'annule identiquement quand on la contracte par u_μ . Les termes du développement (18) qui contiennent ce facteur n'entrent donc pas en ligne de compte et $m_{\mu\nu\alpha}$ pourra être remplacé par $*m_{\mu\nu\alpha} + S_{\alpha\mu}u_\nu$.

D'autre part ces deux derniers tenseurs sont orthogonaux à u_μ et u_α . On supprimera donc également dans le crochet les termes qui comportent ces vecteurs. Il reste donc :

$$(*m_{\mu\nu\alpha} + S_{\alpha\mu}u_\nu)(\delta_{\mu\alpha} - 3\lambda_\mu\lambda_\alpha) = 0.$$

Si on projette sur les axes propres où toutes les composantes 4 de $*m_{\mu\nu\alpha}$ et $S_{\alpha\mu}$ sont nulles, l'équation se décompose en deux équations suivant que ν est un indice d'espace ou de temps :

$$(I-19_1) \quad *m_{ijk}(\delta_{ik} - 3\lambda_i\lambda_k) = 0$$

$$(I-19_2) \quad i c S_{kl}(\delta_{lk} - 3\lambda_l\lambda_k) = 0.$$

On peut facilement résoudre ces équations par rapport aux parties symétriques de $*m_{ijk}$ et S_{kl} . On en tire en effet :

$$(I-19_1') \quad \frac{1}{2}(*m_{ijk} + *m_{kji})(\delta_{lk} - 3\lambda_l\lambda_k) = 0$$

$$(I-19_2') \quad \frac{1}{2}(S_{kl} + S_{lk})(\delta_{lk} - 3\lambda_l\lambda_k) = 0.$$

Si on remarque que, dans l'espace propre où r représente la longueur du vecteur d'espace l_i , le vecteur $\lambda_i = \frac{l_i}{r}$ est unitaire : $\delta_{ik}\lambda_i\lambda_k = 1$

et si on se rappelle que : $\delta_{ik}\delta_{ik} = 3$ on voit que : $\delta_{ik}(\delta_{ik} - 3\lambda_i\lambda_k) = 0$.

Dans le premier membre de chacune des équations (1') et (2'), le premier facteur (symétrique) contient donc δ_{ik} et les solutions sont de la forme :

$$\frac{1}{2}(*m_{ijk} + *m_{kji}) = c^2 *m_j \delta_{ik}$$

$$\frac{1}{2}(S_{kl} + S_{lk}) = c^2 S \delta_{lk}$$

$*m_j$ étant un vecteur d'espace et S un scalaire. Enfin en tenant compte de toutes les composantes 4 qui sont nulles, on a les solutions covariantes générales :

$$\frac{1}{2}(*m_{\mu\nu\alpha} + *m_{\alpha\nu\mu}) = *m_\nu(c^2\delta_{\mu\alpha} + u_\mu u_\alpha) \equiv c^2 *m_\nu \eta_{\mu\alpha} \quad \text{avec} \quad *m_\nu u_\nu = 0$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{2}(S_{\mu\alpha} + S_{\alpha\mu}) = S(c^2\delta_{\mu\alpha} + u_\mu u_\alpha) \equiv c^2 S \eta_{\mu\alpha}.$$

On ne peut exprimer complètement $S_{\mu\alpha}$.

$$\text{On a : } S_{\mu\alpha} = c^2 S \eta_{\mu\alpha} + S_{\mu\alpha}^*$$

Mais pour $*m_{\mu\nu\alpha}$ qui est symétrique en μ et ν on tire facilement l'expression complète :

$$*m_{\mu\nu\alpha} = c^2 *m_\nu \eta_{\mu\alpha} + c^2 *m_\mu \eta_{\nu\alpha} - c^2 *m_\alpha \eta_{\mu\nu}.$$

Considérons maintenant la contribution qu'apporteront à la divergence z , — et par conséquence à la condition $z, = 0$ — le tenseur ${}^*m_{\mu\nu\alpha}$ et la partie symétrique de $S_{\mu\alpha}$ soit :

$$\partial_\alpha \left(\frac{{}^*m_{\mu\nu\alpha} + S_{\mu\alpha}u_\nu + S_{\nu\alpha}u_\mu}{r} \right).$$

On a d'abord trois termes :

$$c^2 \delta_{\mu\alpha} \partial_\alpha \left(\frac{{}^*m_\nu + Su_\nu}{r} \right) + c^2 \delta_{\nu\alpha} \partial_\alpha \left(\frac{{}^*m_\mu + Su_\mu}{r} \right) - c^2 \delta_{\mu,\partial_\alpha} \left(\frac{{}^*m_\alpha + Su_\alpha}{r} \right).$$

On peut simplifier l'écriture en posant $\Gamma_\nu = c^2 \left(\frac{{}^*m_\nu + Su_\nu}{r} \right)$ et l'on sait que $\square \Gamma_\nu = 0$ d'après le théorème général.

Les trois termes considérés s'écrivent alors $\partial_\mu \Gamma_\nu + \partial_\nu \Gamma_\mu - \delta_{\mu\nu} \partial_\alpha \Gamma_\alpha$ et leur divergence est

$$\partial_\mu \partial_\mu \Gamma_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \Gamma_\mu - \partial_\nu \partial_\alpha \Gamma_\alpha = \square \Gamma_\nu + \partial_\nu \partial_\mu \Gamma_\mu - \partial_\nu \partial_\alpha \Gamma_\alpha.$$

Elle est nulle. Les termes considérés n'apportent donc pas de contribution à la divergence totale.

Quant aux autres termes

$$- \partial_\alpha \left(\frac{{}^*m_\nu u_\mu u_\alpha}{r} \right) - \partial_\alpha \left(\frac{{}^*m_\mu u_\nu u_\alpha}{r} \right) - \partial_\alpha \left(\frac{Su_\mu u_\alpha u_\nu}{r} \right) - \partial_\alpha \left(\frac{Su_\nu u_\alpha u_\mu}{r} \right)$$

on peut les transformer d'après la formule (17) en :

$$- \frac{1}{r} \frac{d}{d\tau} ({}^*m_\nu u_\mu + {}^*m_\mu u_\nu + 2Su_\mu u_\nu).$$

Ils sont donc de la forme $\frac{m_{\mu\nu}}{r}$ et peuvent être, eux aussi, incorporés au terme unipolaire.

On voit donc que, en conséquence de la première relation, il ne subsiste dans le développement (18) de $m_{\mu\nu\alpha}$ que le terme en n_α et la partie antisymétrique des termes en $S_{\alpha\nu}$.

Nous pouvons écrire désormais :

$$m_{\mu\nu\alpha} = S_{[\alpha\mu]}u_\nu + S_{[\alpha\nu]}u_\mu - n_\alpha u_\mu u_\nu$$

où le tenseur $S_{[\alpha\mu]}$ est *antisymétrique*.

On rappelle que

$$S_{[\alpha\mu]}u_\mu = 0 \quad \text{et} \quad n_\mu u_\mu = 0.$$

Il est possible de simplifier encore cette expression si on cherche,

comme nous l'avons fait pour le cas unipolaire, à lui donner une interprétation physique en comparant le potentiel qu'il nous fournit

$$\psi_{\mu\nu} = \partial_\alpha \left(\frac{S_{\alpha\mu}u_\nu + S_{\alpha\nu}u_\mu + n_\alpha u_\mu u_\nu}{r} \right) + \frac{m_{\mu\nu}}{r}$$

avec celui que nous a donné la théorie dualiste ordinaire :

$$\Phi_{\mu\nu} = \frac{1}{r_0} \sum m_0 u_\mu u_\nu + \partial_\alpha \left(\frac{1}{r} \right)_0 \sum m_0 y_\alpha u_\mu u_\nu + \dots$$

Si on compare les composantes 4,4 on a :

$$\begin{aligned} \psi_{44} &= -c^2 \partial_\alpha \left(\frac{n_\alpha}{r} \right) + \frac{m_{44}}{r} \\ &= -c^2 n_\alpha \partial_\alpha \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{m_{44} - c^2 \partial_\alpha n_\alpha}{r} \end{aligned}$$

et :

$$\Phi_{44} = -c^2 \sum m_0 y_\alpha \partial_\alpha \left(\frac{1}{r} \right)_0 - \frac{c^2 \sum m_0}{r_0}$$

en négligeant les autres termes.

On peut alors identifier terme à terme et poser

$$n_\alpha = \sum m_0 y_\alpha$$

qui est *nul* puisque nous avons localisé le point A, pris comme origine, au centre de gravité relatif au système propre.

On a ainsi finalement :

$$(I-20) \quad \boxed{m_{\mu\nu\alpha} = S_{[\alpha\mu]}u_\nu + S_{[\alpha\nu]}u_\mu}$$

$$n_\alpha = 0 \quad \text{entraîne} \quad \partial_\alpha n_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad m_{44} = -c^2 \sum m_0$$

(nous avons supprimé le coefficient $-\frac{K}{2\pi}$).

Il est possible d'aller plus loin et d'identifier les composantes 4 i :

On a :

$$\begin{aligned} \psi_{4i} &= -\partial_\alpha \left(\frac{ic S_{i\alpha}}{r} \right) + \frac{m_{4i}}{r} \\ &= -\frac{ic}{r} \left(\frac{m_{4i}}{ic} + \partial_\alpha S_{i\alpha} \right) + ic \partial_\alpha \left(\frac{1}{r} \right) S_{i\alpha} \end{aligned}$$

et :

$$\Phi_{4i} = \frac{ic}{r_0} \sum m_0 v_i + ic \partial_\alpha \left(\frac{1}{r} \right)_0 \sum m_0 v_i y_\alpha$$

On voit que cette identification porte sur des composantes qui, comparées à ψ_{44} et Φ_{44} , comportent un facteur $\frac{v_i}{c}$ (alors que les composantes $i j$ en comportent deux). Il s'agit donc bien d'une deuxième approximation,

comparativement au cas du potentiel unipolaire où nous n'avions pu identifier que les composantes 4,4. Il vient :

$$\frac{m_{4i}}{ic} - \partial_a S_{ia} = \Sigma m_0 \nu_i$$

et

$$S_{ia} = -\Sigma m_0 \nu_i y_a.$$

Comme nous avons été amenés à ne conserver que la partie antisymétrique de $S_{\mu\nu}$, on a en réalité :

$$S_{[ia]} = \frac{1}{2} \Sigma m_0 (y_i \nu_a - y_a \nu_i).$$

Autrement dit : les composantes d'espace de $S_{[\mu\nu]}$ dans le système propre représentent le *moment angulaire interne* de la goutte relativement au centre de gravité. Et on a bien :

$$(I-21) \quad \boxed{S_{[\mu\nu]} u_\nu = 0},$$

soit la condition auxiliaire de Frenkel.

Reportons-nous maintenant à la seconde relation, qui annule le terme en $\frac{1}{r^2}$ dans la divergence z_ν .

Si nous remplaçons $m_{\mu\nu}$ par l'expression $m_{\mu\nu} = S_{\alpha\mu} u_\nu + S_{\alpha\nu} u_\mu$, on a pour les différents termes :

$$m_{\mu\nu}(\dot{u}_\mu \lambda_\alpha + u_\alpha \dot{\lambda}_\mu) = S_{[\alpha\mu]}(u_\mu \dot{\lambda}_\alpha + u_\alpha \dot{\lambda}_\mu) u_\nu + S_{[\alpha\nu]} u_\mu u_\mu \dot{\lambda}_\alpha + S_{[\alpha\nu]} u_\alpha \dot{\lambda}_\mu u_\mu = -c^2 S_{[\alpha\nu]} \dot{\lambda}_\alpha,$$

le premier terme s'annulant par antisymétrie, le dernier s'annulant d'après (21).

$$m_{\mu\nu}(\delta_{\mu\alpha} - 6\lambda_\mu \lambda_\alpha) = \delta_{\mu\alpha} S_{\alpha\mu} u_\nu + S_{\mu\nu} \dot{u}_\mu - 6S_{\alpha\mu} \lambda_\alpha \dot{\lambda}_\mu u_\nu - 6S_{\alpha\nu} \lambda_\alpha \dot{\lambda}_\mu u_\mu = 6c S_{\alpha\nu} \dot{\lambda}_\alpha,$$

en tenant compte de (10), de (21) et de l'antisymétrie de $S_{\alpha\mu}$.

$$m_{\mu\nu}(\lambda_\mu \dot{u}_\alpha + \lambda_\alpha \dot{u}_\mu) = S_{\alpha\mu}(\lambda_\mu \dot{u}_\alpha + \lambda_\alpha \dot{u}_\mu) u_\nu + S_{\alpha\nu} \dot{u}_\alpha u_\mu \dot{\lambda}_\mu + S_{\alpha\nu} \lambda_\alpha u_\mu \dot{u}_\mu = -c S_{\alpha\nu} \dot{u}_\alpha,$$

en tenant compte de l'antisymétrie, de (10), et de la relation $u_\mu \dot{u}_\mu = 0$ qui résulte de

$$(I-22) \quad u_\mu \dot{u}_\mu = -c^2.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\mu\nu} &= \dot{S}_{\alpha\mu} u_\nu + \dot{S}_{\alpha\nu} u_\mu + S_{\alpha\mu} \dot{u}_\nu + S_{\alpha\nu} \dot{u}_\mu \\ \dot{m}_{\mu\nu} \delta_{\mu\alpha} &= \delta_{\mu\alpha} \dot{S}_{[\alpha\mu]} u_\nu + \dot{S}_{\mu\nu} u_\mu + \delta_{\alpha\mu} S_{[\alpha\mu]} \dot{u}_\nu + \dot{S}_{\mu\nu} \dot{u}_\mu = \dot{S}_{\mu\nu} u_\mu + S_{\mu\nu} \dot{u}_\mu = \frac{d}{d\tau} (S_{\mu\nu} u_\mu) = 0 \\ \dot{m}_{\mu\nu} \lambda_\mu \dot{\lambda}_\alpha &= \dot{S}_{[\alpha\mu]} \lambda_\mu \dot{\lambda}_\alpha u_\nu + \dot{S}_{[\alpha\nu]} \lambda_\alpha \dot{\lambda}_\mu u_\mu + S_{[\alpha\mu]} \lambda_\alpha \dot{\lambda}_\mu \dot{u}_\nu + S_{[\alpha\nu]} \lambda_\alpha \dot{\lambda}_\mu \dot{u}_\mu \\ &= -c^2 \dot{S}_{[\alpha\nu]} \dot{\lambda}_\alpha + S_{[\alpha\nu]} \lambda_\alpha \dot{u}_\mu \dot{\lambda}_\mu \\ \dot{m}_{\mu\nu}(\lambda_\mu \dot{u}_\alpha + \lambda_\alpha \dot{u}_\mu) &= (\dot{S}_{[\alpha\mu]} u_\nu + S_{[\alpha\mu]} \dot{u}_\nu)(\lambda_\mu \dot{u}_\alpha + \lambda_\alpha \dot{u}_\mu) \\ &\quad + \dot{S}_{[\alpha\nu]} u_\alpha \dot{\lambda}_\mu \dot{u}_\mu + \dot{S}_{[\alpha\nu]} \lambda_\alpha u_\mu \dot{u}_\mu + S_{[\alpha\nu]} u_\alpha \dot{\lambda}_\mu \dot{u}_\mu + S_{[\alpha\nu]} \lambda_\alpha u_\mu \dot{u}_\mu = -c \dot{S}_{[\alpha\nu]} u_\alpha - c^2 \dot{S}_{[\alpha\nu]} \dot{\lambda}_\alpha \end{aligned}$$

en tenant compte de l'antisymétrie de $S_{[\alpha\mu]}$, de (10), de (21) et de (22).

On a donc pour les termes dipolaires de B_v :

$$\begin{aligned} \frac{S_{\alpha\gamma}}{c} (3\lambda_\beta \dot{u}_\beta \lambda_\alpha - \dot{u}_\alpha + 3\lambda_\mu \dot{u}_\mu \lambda_\alpha) + \dot{S}_{\alpha\gamma} \left(\lambda_\alpha - 2 \frac{u_\alpha}{c} \right) \\ = - \frac{1}{c} (S_{\alpha\gamma} \dot{u}_\alpha + 2 \dot{S}_{\alpha\gamma} u_\alpha) + \dot{S}_{\alpha\gamma} \lambda_\alpha = \dot{S}_{\alpha\gamma} \left(\lambda_\alpha - \frac{u_\alpha}{c} \right) \end{aligned}$$

car

$$S_{\alpha\gamma} \dot{u}_\alpha + \dot{S}_{\alpha\gamma} u_\alpha = \frac{d}{d\tau} (S_{\alpha\gamma} u_\alpha) = 0.$$

Enfin les termes unipolaires donnent

$$m_{\mu\nu} \left(\lambda_\mu - \frac{u_\mu}{c} \right).$$

D'où en définitive :

$$(I-23) \quad B_v = (\dot{S}_{[\alpha\gamma]} + m_{\alpha\gamma}) \left(\lambda_\alpha - \frac{u_\alpha}{c} \right) = 0.$$

Pour tirer parti de cette relation, décomposons le tenseur $m_{\alpha\gamma}$ comme nous l'avons fait avec $m_{\mu\nu\alpha}$

$$(I-24) \quad m_{\alpha\gamma} \equiv {}^*m_{\alpha\gamma} + P_\alpha u_\gamma + P_\gamma u_\alpha + q u_\alpha u_\gamma$$

avec

$${}^*m_{\alpha\gamma} u_\alpha = {}^*m_{\alpha\gamma} u_\gamma = P_\alpha u_\alpha = 0.$$

On remarque alors que

$$(I-25) \quad u_\alpha \left(\lambda_\alpha - \frac{u_\alpha}{c} \right) = 0$$

en vertu de (10). Les termes en u_α dans le développement (24) disparaissent donc identiquement dans l'équation (23) qu'on peut écrire :

$$(\dot{S}_{\alpha\gamma} + {}^*m_{\alpha\gamma} + P_\alpha u_\gamma) \left(\lambda_\alpha - \frac{u_\alpha}{c} \right) = 0.$$

D'autre part, la relation (25) montre que la première parenthèse est de la forme :

$$(I-26) \quad \dot{S}_{\alpha\gamma} + {}^*m_{\alpha\gamma} + P_\alpha u_\gamma = u_\alpha Q_\gamma.$$

Si on contracte par u_α on obtient l'expression du vecteur

$$Q_\gamma = - \frac{1}{c^2} \dot{S}_{\alpha\gamma} u_\alpha = \frac{1}{c^2} \dot{S}_{\gamma\alpha} u_\alpha$$

et on voit en contractant par u_γ que $Q_\gamma u_\gamma = \frac{1}{c^2} \dot{S}_{\gamma\alpha} u_\alpha u_\gamma = 0$ par antisymétrie.

Si alors nous contractons directement (26) par u , il vient :

$$\dot{S}_{\alpha\gamma} u_\gamma - c^2 P_\alpha = 0$$

d'où l'expression de P_α : $P_\alpha = \frac{1}{c^2} \dot{S}_{\alpha\nu} u_\nu$ que nous pouvons porter dans l'équation (26) ainsi que celle de Q_ν :

$$\begin{aligned}\dot{S}_{\alpha\nu} + {}^*m_{\alpha\nu} + \frac{1}{c^2} \dot{S}_{\alpha\beta} u_\beta u_\nu &= \frac{1}{c^2} \dot{S}_{\nu\beta} u_\beta u_\alpha \\ \dot{S}_{\alpha\nu} + {}^*m_{\alpha\nu} &= \frac{1}{c^2} u_\beta (\dot{S}_{\nu\beta} u_\alpha - \dot{S}_{\alpha\beta} u_\nu).\end{aligned}$$

On voit que tous les termes sont antisymétriques en α et ν , sauf ${}^*m_{\alpha\nu}$ qui est symétrique. Donc ${}^*m_{\alpha\nu} = 0$ et il reste :

$$(I-27) \quad \dot{S}_{\alpha\nu} = \frac{1}{c^2} (\dot{S}_{\nu\beta} u_\beta u_\alpha - \dot{S}_{\alpha\beta} u_\beta u_\nu).$$

Nous remarquons que le vecteur $P_\alpha = \frac{1}{c^2} \dot{S}_{\alpha\nu} u_\nu$ peut aussi s'écrire $P_\alpha = -\frac{1}{c^2} S_{\alpha\nu} \dot{u}_\nu$, puisque :

$$\dot{S}_{\alpha\nu} u_\nu + S_{\alpha\nu} \dot{u}_\nu = \frac{d}{d\tau} (S_{\alpha\nu} u_\nu) = 0.$$

Ce vecteur doit donc être identifié avec l'impulsion transversale P_α de la théorie de Frenkel. En l'introduisant dans l'équation (27) celle-ci devient :

$$\dot{S}_{\alpha\nu} = P_\nu u_\alpha - P_\alpha u_\nu$$

c'est la deuxième équation de Frenkel en l'absence de champ électromagnétique.

Il nous reste à annuler le terme en $\frac{1}{r}$ de la divergence z , soit C_ν . Si nous n'écrivons pas les expressions qui s'annulent par antisymétrie, on a, en tenant compte de (20) :

$$\begin{aligned}\dot{m}_{\mu\nu\alpha} \lambda_\mu \lambda_\alpha &= -c \dot{S}_{\alpha\nu} \lambda_\alpha + 2 \dot{S}_{\alpha\nu} \dot{u}_\mu \lambda_\mu \lambda_\alpha + S_{\alpha\nu} \ddot{u}_\mu \lambda_\mu \lambda_\alpha \\ \dot{m}_{\mu\nu\alpha} \lambda_\mu \lambda_\alpha &= -c \dot{S}_{\alpha\nu} \lambda_\alpha + S_{\alpha\nu} u_\mu \lambda_\mu \lambda_\alpha \\ m_{\mu\nu\alpha} \lambda_\mu \lambda_\alpha &= -c S_{\alpha\nu} \lambda_\alpha.\end{aligned}$$

Ce qui donne pour les termes dipolaires de C_ν :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} [-c \ddot{S}_{\alpha\nu} \lambda_\alpha + 2 \dot{S}_{\alpha\nu} \dot{u}_\beta \lambda_\beta \lambda_\alpha + S_{\alpha\nu} \ddot{u}_\mu \lambda_\mu \lambda_\alpha] + 3 \frac{\dot{u}_\beta \lambda_\beta}{c^3} (-c \dot{S}_{\alpha\nu} \lambda_\alpha + S_{\alpha\nu} \dot{u}_\beta \lambda_\beta \lambda_\alpha) \\ + 3 \frac{(\dot{u}_\beta \lambda_\beta)^2}{c^4} (-c S_{\alpha\nu} \lambda_\alpha) + \frac{\dot{u}_\beta \lambda_\beta}{c^3} (-c S_{\alpha\nu} \lambda_\alpha) = -\frac{1}{c} \ddot{S}_{\alpha\nu} \lambda_\alpha - \frac{1}{c^2} \lambda_\beta \dot{u}_\beta \dot{S}_{\alpha\nu} \lambda_\alpha.\end{aligned}$$

Les termes unipolaires étant :

$$-\frac{1}{c} \dot{m}_{\alpha\nu} \lambda_\alpha - \frac{1}{c^2} \lambda_\beta \dot{u}_\beta m_{\alpha\nu} \lambda_\alpha$$

on voit qu'on peut poser $R_{\alpha\nu} = m_{\alpha\nu} + \dot{S}_{\alpha\nu}$ et qu'on a :

$$C_\nu = -\frac{1}{c} \dot{R}_{\alpha\nu} \lambda_\alpha - \frac{1}{c^2} \lambda_\beta \dot{u}_\beta R_{\alpha\nu} \lambda_\alpha.$$

En explicitant $m_{\alpha\nu} = P_\alpha u_\nu + P_\nu u_\alpha + q u_\alpha u_\nu$ et $\dot{S}_{\alpha\nu} = P_\nu u_\alpha - P_\alpha u_\nu$, il vient

$$R_{\alpha\nu} = (2P_\nu + q u_\nu) u_\alpha$$

$$\dot{R}_{\alpha\nu} = (2\dot{P}_\nu + \dot{q} u_\nu + q \dot{u}_\nu) u_\alpha + (2P_\nu + q u_\nu) \dot{u}_\alpha$$

D'où : $R_{\alpha\nu} \lambda_\alpha = -c(2P_\nu + q u_\nu)$ d'après (10)

$$\dot{R}_{\alpha\nu} \lambda_\alpha = -c(2\dot{P}_\nu + \dot{q} u_\nu + q \dot{u}_\nu) + \lambda_\beta \dot{u}_\beta (2P_\nu + q u_\nu)$$

ou enfin :

$$C_\nu = 2\dot{P}_\nu + \dot{q} u_\nu + q \dot{u}_\nu = 0.$$

Pour retrouver les notations de Frenkel, on peut poser

$$q = -2\mathcal{N}_0 \quad G_\mu = \mathcal{N}_0 u_\mu - P_\mu$$

et on retombe finalement sur la première équation de Frenkel :

$$\boxed{\dot{G}_\mu = 0}$$

Ainsi le formalisme de Mathisson permet de montrer que le principe général d'Einstein et Infeld suivant lequel la matière peut être considérée comme une singularité du champ de gravitation, s'applique non seulement au point matériel classique, mais aussi au corpuscule tournant, qui permet par l'introduction d'une grandeur supplémentaire, le moment angulaire interne, de décrire plus finement le mouvement global d'une gouttelette matérielle. Comme pour le point matériel classique, on retrouve les résultats obtenus dans le cadre de la conception dualiste ordinaire, pour la dynamique du point tournant.

§ 6. Théorie de Weyssenhoff.

Les équations de la dynamique du corpuscule tournant, pour lesquelles nous avons indiqué deux voies d'accès différentes, ont été retrouvées à partir d'un point de vue encore différent par M. Jan v. Weyssenhoff ⁽²⁾, aux travaux duquel nous ferons de fréquentes allusions par la suite, car il a construit son modèle dans le cadre d'une théorie du fluide relativiste doté de rotation interne. L'hydrodynamique de Weyssenhoff est édifiée par voie axiomatique. Il considère un fluide défini par la donnée en chaque point de trois grandeurs tensorielles relativistes : une *vitesse unitaire du courant* u_μ pour laquelle on a $u_\mu u_\mu = -c^2$, un vecteur *densité d'impulsion* g_μ qu'on n'astreint pas à être colinéaire au courant,

enfin un tenseur antisymétrique *densité de moment angulaire interne* $s_{[\mu\nu]}$, dont on suppose que toutes les composantes sont dans l'espace propre local, ce qui s'exprime par la « condition cinématique auxiliaire » $s_{\mu\nu}u_\nu = 0$.

Weyssenhoff soumet alors le fluide à deux lois dynamiques qui s'expriment par des conditions de divergence nulle pour un tenseur *densité d'énergie impulsion* et pour un tenseur *densité de moment de rotation total*.

Weyssenhoff considère un fluide « matière pure » dépourvu de tensions internes. Or on sait que dans le cas d'un tel fluide et en l'absence de rotation interne, la densité d'impulsion est colinéaire à la vitesse : $g_\mu = \mu_0 u_\mu$ (μ_0 étant la densité invariante de masse), et le tenseur relativiste d'énergie-impulsion a pour expression :

$$t_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu = g_\mu u_\nu$$

Weyssenhoff conserve la deuxième expression et la suppose encore valable dans le cas d'une impulsion non-colinéaire à la vitesse. Il est essentiel de remarquer que le tenseur $t_{\mu\nu}$ qui, dans le cas classique était symétrique, devient de ce fait un tenseur non-symétrique. La première loi dynamique s'écrit alors :

$$\partial_\nu t_{\mu\nu} = \partial_\nu (g_\mu u_\nu) = 0.$$

Pour écrire la seconde loi, la voie suivie par Weyssenhoff revient à ajouter à l'expression ordinaire de la *densité de moment de rotation « orbitale »*, soit $x_\mu t_{\nu\lambda} - x_\nu t_{\mu\lambda}$, une quantité supplémentaire reliée au moment angulaire interne, la *densité de moment de rotation « propre »*, à laquelle on donne l'expression $s_{\mu\nu}u_\lambda$, ce qui donne pour la deuxième équation dynamique :

$$\partial_\lambda (x_\mu t_{\nu\lambda} - x_\nu t_{\mu\lambda}) + \partial_\lambda (s_{\mu\nu}u_\lambda) = 0.$$

On peut transformer ces expressions en introduisant les « dérivées le long d'une ligne de courant » (voir Appendice A) :

$$\dot{g}_\mu = \partial_\nu (u_\nu g_\mu) \quad \dot{s}_{\mu\nu} = \partial_\lambda (u_\lambda s_{\mu\nu})$$

et d'autre part en remarquant que

$$\partial_\lambda (x_\mu t_{\nu\lambda} - x_\nu t_{\mu\lambda}) = \delta_{\lambda\mu} t_{\nu\lambda} - \delta_{\lambda\nu} t_{\mu\lambda} + x_\mu \partial_\lambda t_{\nu\lambda} - x_\nu \partial_\lambda t_{\mu\lambda}.$$

Les deux derniers termes sont nuls en vertu de la première loi de conservation. Les deux autres fournissent $t_{\nu\mu} - t_{\mu\nu}$, soit la partie antisymétrique du tenseur $t_{\mu\nu}$. On a ainsi :

$$\partial_\lambda (x_\mu t_{\nu\lambda} - x_\nu t_{\mu\lambda}) = t_{\nu\mu} - t_{\mu\nu} \equiv g_\nu u_\mu - g_\mu u_\nu.$$

Au total les deux équations deviennent :

$$\dot{g}_\mu = 0 \quad \text{et} \quad \dot{s}_{\mu\nu} = g_\mu u_\nu - g_\nu u_\mu.$$

Jusqu'ici, il s'agit toujours d'hydrodynamique. Considérons maintenant en un point P du fluide l'espace propre *local*. On peut dans cet espace découper une gouttelette infinitésimale contenant le point P — gouttelette qui va au cours de son mouvement, balayer un tube infinitésimal d'univers — et intégrer dans le système propre sur le volume propre V_0 de la gouttelette les diverses densités que nous avons considérées. On a ainsi : l'impulsion de la gouttelette $G_\mu = \int_{V_0} g_\mu dV_0$ et son moment angulaire interne $S_{[\mu\nu]} = \int_{V_0} s_{\mu\nu} dV_0$.

On peut alors intégrer chaque membre des équations de Weyssenhoff sur le volume propre de la gouttelette, soit :

$$\int_{V_0} \dot{g}_\mu dV_0 = 0 \quad \int_{V_0} \dot{s}_{\mu\nu} dV_0 = \int_{V_0} g_\mu u_\nu dV_0 - \int_{V_0} g_\nu u_\mu dV_0.$$

On sait que le type de dérivation employé nous permet d'écrire :

$$\int_{V_0} \dot{g}_\mu dV_0 = \frac{d}{d\tau} \int_{V_0} g_\mu dV_0 = \dot{G}_\mu \quad (\text{voir Appendice A})$$

et de même $\int_{V_0} \dot{s}_{\mu\nu} dV_0 = \dot{S}_{\mu\nu}.$

D'autre part le formalisme de Weyssenhoff revient somme toute à diviser la vitesse vraie en chaque point en deux parties : une vitesse d'ensemble u_μ et une vitesse « fine » qui n'intervient que dans les caractéristiques nouvelles du fluide : impulsion non colinéaire à la vitesse et moment angulaire interne. On a donc le droit de supposer que u_μ résulte d'une moyenne prise dans un petit domaine et varie de façon continue et relativement peu, d'un point à l'autre du fluide. On négligera ces variations à l'échelle de la gouttelette considérée, ce qui permettra de faire sortir u_μ de l'intégrale d'espace propre. En définitive, les équations locales de Weyssenhoff se traduiront pour la gouttelette par les équations globales :

$$\dot{G}_\mu = 0 \quad \text{et} \quad \dot{S}_{\mu\nu} = G_\mu u_\nu - G_\nu u_\mu.$$

qui, jointes à la condition $S_{\mu\nu} u_\nu = 0$, qu'on obtient de la même manière en intégrant la relation hydrodynamique $s_{\mu\nu} u_\nu = 0$, nous donne le système de Frenkel et Mathisson.

L'extension de la théorie de Weyssenhoff au cas où il existe un champ électromagnétique extérieur résulte immédiatement de la traduction

hydrodynamique des résultats classiques sur l'action d'un champ $F_{\mu\nu}$ sur une charge électrique e et sur un doublet de moment magnéto-électrique $\mu_{\alpha\beta}$.

Le point électrisé subit une force $F_\mu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu$ (force de Lorentz).

Le doublet subit une force $\Phi_\mu = \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta}$ (force de Stern-Gerlach) et un couple $N_{\mu\nu} = \mu_{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} - \mu_{\alpha\nu} F_{\alpha\mu}$.

Les hypothèses de Weyssenhoff reviennent à supposer le fluide doté d'une *distribution de charge*, avec une densité volumique d'électricité ρe , et d'une *distribution de moment magnéto-électrique interne* de densité volumique $\rho \mu_{\alpha\beta}$. On aura alors une *densité de force par unité de volume*

$$f_\mu = \rho \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu + \frac{1}{2} \rho \mu_{\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta}$$

et une densité de couple électromagnétique :

$$n_{\mu\nu} = \rho \mu_{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} - \rho \mu_{\alpha\nu} F_{\alpha\mu}.$$

En outre, comme Frenkel, Weyssenhoff suppose que la densité de moment magnéto-électrique interne $\rho \mu_{\alpha\beta}$ est proportionnelle et colinéaire à la densité de moment angulaire interne $s_{\alpha\beta}$: $\rho \mu_{\alpha\beta} = \kappa s_{\alpha\beta}$, κ étant une constante. Les lois classiques de l'hydrodynamique fournissent alors les équations

$$\partial_\nu t_{\mu\nu} = \rho \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu + \frac{1}{2} \rho \mu_{\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta}$$

$$\partial_\lambda m_{\mu\nu\lambda} = \rho \mu_{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} - \rho \mu_{\alpha\nu} F_{\alpha\mu}$$

c'est-à-dire :

$$\dot{g}_\mu = \rho \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu + \frac{\kappa}{2} s_{\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta}$$

$$g_\nu u_\mu - g_\mu u_\nu + \dot{s}_{\mu\nu} = \kappa s_{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} - \kappa s_{\alpha\nu} F_{\alpha\mu}.$$

On intègre sans difficulté toutes ces quantités sur le volume propre d'une gouttelette infinitésimale, en supposant négligeables les variations du champ à l'échelle des dimensions de la gouttelette et en introduisant

$$\text{la charge totale } Q = \int_{V_0} \rho e dV_0.$$

Il vient :

$$\dot{G}_\mu = \frac{Q}{c} F_{\mu\nu} u_\nu + \frac{\kappa}{2} S_{\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta}$$

$$\dot{S}_{\mu\nu} = G_\mu u_\nu - G_\nu u_\mu + \kappa (S_{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} - S_{\alpha\nu} F_{\alpha\mu})$$

$$S_{\mu\nu} u_\nu = 0.$$

Ce sont les formules de Frenkel. On peut montrer sans difficulté que l'impulsion comporte nécessairement un terme électromagnétique et qu'il en est de même de la masse propre qu'elles permettent de définir

pour la particule. L'expression de ces termes électromagnétiques sera la même que chez Frenkel et l'identification sera complète.

Il est intéressant de remarquer que, puisqu'on a affaire à un fluide sans tensions internes, la gouttelette de Weyssenhoff n'est soumise à aucune action de la part du reste du fluide, et qu'on peut aussi bien la considérer comme isolée. Les équations globales ci-dessus caractériseront donc la dynamique d'une gouttelette aussi petite que l'on veut, et nous obtiendrons ainsi une dynamique du corpuscule matériel tournant isolé. C'est pour cela que le système d'équation obtenu est identique à celui donné par Frenkel ou Mathisson pour caractériser directement un point tournant isolé.

On peut même renverser le raisonnement de Weyssenhoff et, toujours en raison de l'absence de tensions internes, prendre pour point de départ, non le fluide continu défini axiomatiquement, mais la gouttelette de Weyssenhoff, identique au corpuscule tournant de Frenkel-Mathisson, caractérisée par une impulsion G_μ non colinéaire à la vitesse u_μ et par un moment angulaire interne $S_{\mu\nu}$.

Si on considère une collection de tels corpuscules avec des conditions initiales convenables, on constituera un fluide « matière pure » qui ne sera pas autre chose que le fluide de Weyssenhoff. Ce point de vue nous paraît plus fécond et nous l'adopterons dans la suite, car il permet de construire d'autres fluides à spin en introduisant des forces d'interaction entre les gouttelettes, qui s'exprimeront par des tensions internes dans le fluide. La considération de tensions internes est du reste indispensable si on veut que le fluide puisse propager des ondes. Le fluide de Weyssenhoff apparaîtra ainsi comme un cas particulier, le cas « matière pure », des fluides qu'on peut construire avec des corpuscules de Frenkel-Weyssenhoff.

CHAPITRE II

THÉORIE GÉNÉRALE DU CORPUSCULE TOURNANT RELATIVISTE

§ 1. Principe.

Les travaux que nous venons de rappeler et dont la plupart sont déjà anciens, ont été inspirés par le problème de l'électron tournant tel que le manifeste l'étude des raies spectrales. Leur objet était de permettre un traitement relativiste de ce problème dans l'esprit de l'ancienne théorie des quanta : donner un modèle relativiste du corpuscule tournant *classique* afin de le soumettre ensuite à des règles de quantification. Mais la quantification, tentée notamment par Mathisson, ne donne pas les résultats corrects. On sait du reste que le problème de l'électron tournant relativiste a été complètement résolu — au moins du point de vue formel — par la théorie de Dirac et dans le cadre de la mécanique ondulatoire. Mais il n'est pas sans intérêt, du point de vue de la dynamique non-quantique qui est le nôtre, de se demander à quel corpuscule tournant non-quantique conduit le formalisme de Dirac, quel est le corpuscule classique qui est à l'électron de Dirac ce que le corpuscule de Newton est à l'électron de Schrödinger.

On sait que les opérateurs formés avec les matrices de Dirac permettent d'exprimer au moyen de la fonction d'onde une série de grandeurs tensorielles qui apparaissent en théorie quantique comme représentant des « densités de valeur moyenne » pour les propriétés observables de l'électron. Du point de vue classique, on pourra considérer ces tenseurs comme exprimant directement les propriétés physiques d'un corpuscule classique. Nous reviendrons en détail sur le « corpuscule classique de Dirac » dans le prochain chapitre. Notons seulement que la théorie

de Dirac fait apparaître entre autres un tenseur du second ordre anti-symétrique :

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} B \psi^+ \gamma_4 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha) \psi$$

(B est le magnéton de Bohr), qui fournit la densité de valeur moyenne du *moment magnéto-électrique* tel qu'il peut être observé lorsqu'on fait agir un champ électromagnétique sur l'électron. Or on se souvient que Frenkel avait posé deux hypothèses à la base de son modèle de corpuscule tournant :

1) Le moment magnéto-électrique et le moment angulaire interne sont proportionnels :

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{e}{m_0 c} S_{\alpha\beta}$$

2) Tous deux sont dans l'espace propre :

$$\mu_{\alpha\beta} u_\beta = S_{\alpha\beta} u_\beta = 0.$$

Il paraît raisonnable de conserver la première hypothèse dans le cas de Dirac et de poser

$$S_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \frac{B m_0 c}{e} \psi^+ \gamma_4 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha) \psi.$$

Mais alors on aboutit à un tenseur qui n'est pas dans l'espace propre :

$$S_{\alpha\beta} u_\beta \neq 0.$$

Si on peut donner en théorie classique une interprétation physique à un tel corpuscule, on atteindra ainsi à une dynamique du corpuscule tournant dont la dynamique de Frenkel-Weyssenhoff ne constituera qu'un cas particulier, et ceci pourra être d'un grand intérêt tant pour l'étude tout à fait générale des rotations relativistes, que pour constituer des modèles de fluides dotés de moment angulaire interne.

Une tentative guidée par ces considérations permet de montrer que c'est l'analyse du pur et simple problème de la rotation relativiste d'un corpuscule qui introduit nécessairement des paramètres supplémentaires que n'ont pas aperçus les théoriciens dont nous venons de rappeler les travaux. La mécanique non relativiste, et de même la mécanique relativiste quand elle ne considère pas de rotations « internes », introduit tout naturellement la notion de *point matériel* sans dimension comme élément constitutif de la matière, sans avoir à tenir compte du fait que ce concept est formé en réalité en considérant un petit corps *solide* de notre expérience courante et en faisant tendre ses dimensions vers zéro. Si le corpuscule tourne sur lui-même, le point matériel sans dimension

ne suffit plus pour le représenter. Il faut considérer tout un édifice différencié, si petit et simplifié soit-il, car un mouvement interne suppose nécessairement des parties distinctes, séparées dans l'espace et se mouvant les unes par rapport aux autres.

On peut naturellement penser à procéder par analogie avec le point matériel de Newton considéré comme limite d'un petit corps solide, et envisager un petit édifice *rigide* en rotation. Nos corpuscules seraient alors de petites « toupies ». C'est bien l'hypothèse de Bohm, Vigier, Lochak ⁽¹⁷⁾. Mais ce n'est nullement la seule hypothèse possible, et en fait elle soulève de grosses difficultés de principe. En effet, le corps solide, d'une intuition si claire pour le sens commun, est impossible à concevoir en toute rigueur en physique relativiste. La simultanéité rigoureuse du déplacement de tous ses points doit être réalisée dans n'importe quel référentiel. On peut aussi dire qu'étant parfaitement rigide il transmet les déformations avec une vitesse infinie; toutes choses interdites par la Relativité. Des difficultés doivent donc nécessairement surgir dans un traitement relativiste dès que nous venons à doter le corps solide de parties distinctes, si peu que ce soit, dès qu'on renonce au point matériel de Newton dépourvu de parties.

Renonçant à constituer nos corpuscules par de petits édifices solides, on va tenter ici de les considérer comme de petites gouttes fluides, le fluide — ou le « sous-fluide » — qui les formera étant simplement un fluide *classique*. On peut à bon droit reprocher à un tel modèle d'être arbitrairement « mécaniste ». Le fluide classique est, certes, un « élément » de notre intuition courante (au sens des quatre « éléments » de la physique antique). Il est à ce titre tiré de l'expérience grossière de la matière à notre échelle. Mais il faut remarquer que, dans ces conditions, il n'est ni plus ni moins « mécaniste » que le solide classique. Constituer un fluide — d'ailleurs purement représentatif — au moyen de corpuscules qui sont eux-mêmes des gouttelettes liquides, c'est là certes une démarche discutable, mais elle ne l'est ni plus ni moins qu'une hypothèse qui constitue les gaz, les liquides et les solides au moyen de corpuscules qui sont eux-mêmes conçus comme de petits grains solides. Or c'est là la démarche de tous les physiciens atomistes depuis Démocrite, c'est-à-dire, sous sa forme précise et déterminée, ce que M. Louis de Broglie appelle « la représentation cartésienne des phénomènes par figures et par mouvements » ⁽¹¹⁾. Cette démarche, réfutée *a priori* un très grand nombre de fois par les philosophes, est pourtant celle qui, entre les mains des physiciens et des chimistes, a conduit à d'éclatants succès dans de nombreux domaines et donné naissance à des édifices admirables tels

que la théorie cinétique des gaz, la théorie moléculaire des cristaux, la stéréochimie du carbone, etc... Alors, cette conception peut être taxée de mécanicisme et rejetée sans regret dans les cas où elle échoue (théorie mécanique de l'éther par exemple). Toutes les fois qu'elle réussit au contraire à rendre compte correctement des phénomènes, il est légitime de lui faire confiance pour son efficacité pratique, et il est également légitime de voir dans cette efficacité même le reflet d'une signification physique plus profonde.

C'est dans cet esprit, et en vue de ses applications pratiques que nous allons maintenant aborder l'étude de la dynamique *classique* des masses de fluide relativiste en rotation en adoptant une voie qui nous amènera à une nouvelle dynamique du corpuscule et par la suite, à une nouvelle hydrodynamique capable de représenter les fonctions d'ondes des corpuscules quantiques doués de spin.

§ 2. Grandeurs cinématiques.

Par rapport aux travaux antérieurs de Möller ⁽¹²⁾ et Pryce ⁽¹³⁾, le grand mérite de cette théorie, due pour l'essentiel à D. Bohm et J. P. Vigier ⁽¹⁴⁾, est d'introduire, à côté des quantités représentant l'énergie de la matière, d'autres quantités représentant la matière en mouvement elle-même, abstraction faite de sa masse, de son énergie, des tensions internes qui sont nécessaires pour maintenir sa cohésion. Le tenseur classique $t_{\mu\nu}$, densité d'énergie-impulsion, fait intervenir à la fois et, en principe, sans les expliciter ou les différencier, toutes les formes d'énergie que possèdent les « molécules », énergie propre, énergie cinétique, énergie potentielle due aux tensions internes. Mais on peut donner une première description purement cinématique, du fluide, au moyen de la *vitesse unitaire* locale u_μ ($u_\mu u_\mu = -c^2$) et de la densité *invariante de matière* ρ qui ne fait intervenir que le nombre de « molécules » constituant le fluide — et que nous supposerons identiques — sans égard à leur masse ou à leur énergie.

On définit ainsi un vecteur *densité de courant d'univers* $j_\mu = \rho u_\mu$.

Si nous rapportons ce vecteur au système propre local, on a

$$j_k^0 = 0 \quad j_4^0 = \rho ic \quad \text{ou} \quad j_\otimes^0 = \rho.$$

La composante de temps de j_μ dans le système propre local est donc simplement la densité invariante de matière. Dans un référentiel quelconque, la composante de temps $j_\otimes$ sera encore la densité d'espace de la matière relativement au référentiel considéré, les composantes d'espace formeront un vecteur d'espace « densité de courant de matière », soit

$j_i = j_{\otimes} v_i$ chacune d'elles représentant le débit de matière — ou de « molécules » — qui traverse une aire unité perpendiculaire à l'axe correspondant. On peut remarquer que, si on suppose que les molécules sont porteuses chacune d'une même charge électrique élémentaire e , alors $j_{\otimes} e$ représentera la densité électrique et $j_i e$ les composantes de la densité de courant électrique, et ceci dans n'importe quel référentiel puisque e est un invariant relativiste. Cette remarque achève de préciser la signification physique du quadrivecteur j_{μ} , signification qui subsiste, bien entendu, en l'absence de charge.

Le vecteur courant est conservatif, indépendamment de toute loi dynamique. En effet, la relation

$$\partial_{\lambda} j_{\mu} = \partial_{\mu} (\rho u_{\lambda}) = 0$$

exprime simplement que $\dot{\rho} = 0$, c'est-à-dire que ρ se conserve le long d'une ligne de courant (voir Appendice A) et nous savons aussi que cela signifie que l'intégrale de volume propre $Q = \int_{V_0} \rho dV_0$ attachée à une gouttelette déterminée — et qui n'est autre que la quantité de matière contenue dans cette gouttelette — se conserve au cours du mouvement.

Nous allons maintenant considérer une masse fluide macroscopique dont nous supposerons qu'au cours de son mouvement elle reste limitée dans l'espace et d'un seul tenant [Poincaré a montré que l'existence de tensions internes fait en général tendre une telle masse vers une forme stable, telle par exemple, qu'un tore en rotation ⁽¹⁵⁾], et nous allons voir quelles restrictions la relation $\partial_{\mu} j_{\mu} = 0$ apporte aux mouvements possibles de cette masse, en portant notre attention sur les propriétés globales de la masse fluide prise dans son ensemble.

Pour cela nous utilisons la méthode de Möller (voir appendice A) et nous coupons l'hypertube d'univers balayé par la matière en mouvement, par un hyperplan Π du genre espace orthogonal à un axe Λ du genre temps. L'hyperplan Π rencontre l'hypertube suivant une section d'espace Σ qui est une représentation instantanée du volume de la masse fluide lorsqu'on compte le temps suivant l'axe Λ . On considère des intégrales prises à temps constant et étendues à ce volume.

Si alors nous « pondérons » chacun des points de Σ par la densité de matière $j_{\otimes} = \frac{1}{ic} j_4$, j_4 étant en chaque point la projection du courant

j_μ sur l'axe Λ , on peut former deux sortes d'intégrales :

1) L'intégrale

$$J = \int_{\Sigma} j_{\otimes} d\nu$$

que nous appellerons *quantité de matière* parce qu'elle représente simplement la quantité totale de matière (le nombre total de molécules) contenue dans la masse fluide. Il est physiquement évident que cette quantité est invariable à tous les points de vue, c'est-à-dire qu'elle est indépendante du référentiel $\Pi\Lambda$ considéré, et qu'elle est constante au cours du mouvement, quel que soit le temps employé pour décrire ce mouvement :

$$\frac{dJ}{dt} = 0$$

En remarquant que $J = \frac{1}{ic} \int_{\Sigma} j_4 d\nu$ on trouvera en appendice A une démonstration générale du caractère tensoriel et de la constance dans le temps de telles intégrales, démonstration conditionnée par $\partial_\mu j_\mu = 0$.

On se souviendra que le théorème de Möller est en outre conditionné par la condition que l'intégrale $\int_{\Sigma} j_\mu d\sigma_\mu$ soit nulle sur l'hyperparoi balayée par la surface de la goutte. Cela ressort immédiatement du fait que $d\sigma_\mu$ est en tout point de l'hyperparoi orthogonal à la vitesse d'univers : $j_\mu d\sigma_\mu = 0$.

On voit également que la dérivée $\frac{dJ}{dt} = \int_S (j_4 V_k - ic j_k) ds_k$ est nulle dans n'importe quel référentiel. En effet si on évalue, comme on en a le droit, l'élément différentiel scalaire $(j_4 V_k - ic j_k) ds_k$ dans le référentiel propre local de l'élément d'aire ds_k , on voit que $V_k^o = 0$ et $j_k^o = 0$: la parenthèse est nulle.

2) Les intégrales

$$J\eta_k = \int_{\Sigma} j_{\otimes} x_k d\nu$$

qui définissent dans l'hyperplan Π les coordonnées η_k d'un point et qui ressemblent aux formules classiques définissant le barycentre en physique non relativiste. (Précisons que les coordonnées d'espace x_k du point courant sont supposées rapportées à un trièdre *situé dans l'hyperplan* Π , la coordonnée x_k étant, bien entendu, uniforme puisque l'intégration se fait à temps constant). Toutefois, le cas présent est bien plus compliqué que celui du barycentre car le point η_k n'est pas unique,

il change quand on considère un autre référentiel $\Pi'\Lambda'$. Pour cette raison, nous appellerons ce point le *pseudocentre de matière relatif à l'hyperplan Π* , et nous nous souviendrons qu'on n'a pas le droit de parler d'un tel pseudocentre tant qu'on ne spécifie pas à quel hyperplan il est attaché.

Montrons-le d'abord physiquement sur un exemple. Supposons que dans le référentiel $\Pi\Lambda$ et relativement à la simultanéité particulière définie par ce référentiel, la masse fluide considérée à un instant donné t (suivant une coupe $x_4 = ict$ parallèle à l'hyperplan Π) soit une sphère de composition homogène et de centre O , et supposons qu'au cours du temps cette sphère soit en expansion. Dans le référentiel $\Pi\Lambda$, le pseudocentre de matière sera bien entendu le point O . Mais si nous considérons un autre référentiel $\Pi'\Lambda'$, les points considérés comme simultanés ne seront plus les mêmes. Par exemple les points de la partie droite seront à considérer à un instant antérieur à t , c'est-à-dire, la sphère étant en expansion, qu'ils seront plus près de O que dans le calcul précédent, alors que les points de la partie gauche, considérés à un instant postérieur à t , seront plus éloignés de O . Le pseudocentre de matière ne sera donc plus en O , mais sera déporté vers la gauche.

Pour montrer la même chose mathématiquement, remarquons d'abord que les trois intégrales

$$J\eta_k = \int_{\Sigma} j_{\otimes} x_k d\nu$$

sont effectuées en posant $x_k = \text{constante}$ et que le point obtenu aura évidemment pour quatrième composante $\eta_k = x_k$. Il en résulte que si nous formons de façon analogue la quatrième intégrale

$$\int_{\Sigma} j_{\otimes} x_4 d\nu = \int_{\Sigma} j_{\otimes} \eta_4 d\nu$$

on trouve $\eta_4 \int_{\Sigma} j_{\otimes} d\nu = \eta_4 J$.

On peut donc définir le pseudocentre de matière relatif à Π par ses coordonnées d'univers :

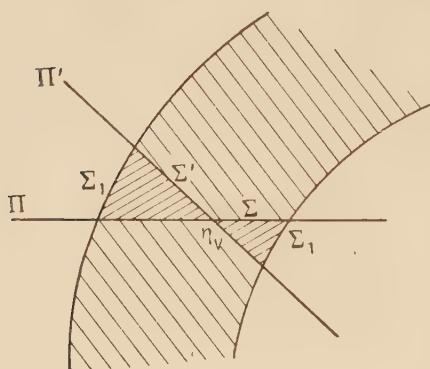
$$(II-1) \quad J\eta_{\mu} = \int_{\Sigma} j_{\otimes} x_{\mu} d\nu$$

η_{μ} représente alors un *vecteur d'univers* qui définit dans tous les systèmes d'axe le pseudocentre de matière attaché à l'hyperplan Π , comme point d'univers au cours de son mouvement. Par contre, le second membre ne représente pas un vecteur — c'est du moins ce que nous allons démontrer — et l'égalité (1) n'est valable que dans le système $\Pi\Lambda$. Nous nous inspirerons de la méthode de Möller (voir appendice A). Coupons le

tube par un autre hyperplan Π' qui définira un autre référentiel de Lorentz $\Pi'\Lambda'$. Dans ce nouveau référentiel, les mêmes conditions définiront un point d'univers η'_v qui sera le pseudocentre de matière *relatif à l'hyperplan Π'* :

$$J\eta'_v = \int_{\Sigma'} j'_v \otimes x'_v d\sigma'.$$

Nous devons considérer les deux points η_v et η'_v au même instant t ,



ce qui, s'ils sont confondus, se traduira *dans n'importe quel référentiel*, par la condition $\eta_4 = \eta'_4$, condition qui restreindra le choix de l'hyperplan Π' . Par exemple si nous connaissons le point η_v relatif au système $\Pi\Lambda$, nous astreindrons l'hyperplan Π' à passer par ce même point. Les hyperplans Π et Π' délimiteront ainsi, avec la paroi Σ_1 , balayé par la surface de la goutte, un

certain hypervolume « croisé » que nous appelons Ω .

Considérons maintenant le tenseur $j_\mu x_\nu$ et prenons sa divergence :

$$\partial_\mu (j_\mu x_\nu) = x_\nu \partial_\mu j_\mu + j_\mu \partial_\mu x_\nu.$$

Le premier terme est nul car $\partial_\mu j_\mu = 0$.

Le second devient $j_\mu \partial_\mu x_\nu = j_\nu$.

Considérons maintenant un champ de vecteur k , *uniforme et arbitraire* et multiplions scalairement par k , les deux expressions trouvées : $k_\nu j_\nu = \partial_\mu (k_\nu j_\mu x_\nu)$ puisque k_ν est uniforme.

Multiplions par l'élément d'hypervolume $d\omega$ et intégrons sur le domaine Ω que nous venons de définir :

$$(II-2) \quad \int_{\Omega} k_\nu j_\nu d\omega = \int_{\Omega} \partial_\mu (k_\nu j_\mu x_\nu) d\omega.$$

La deuxième intégrale peut, par application du théorème de Gauss, se transformer en une intégrale d'hypersurface, que nous pouvons séparer en trois parties relatives aux trois hypersurfaces Σ , Σ' et Σ_1 :

$$\int_{\Omega} k_\nu j_\nu d\omega = \int_{\Sigma} k_\nu j_\mu x_\nu d\sigma_\mu + \int_{\Sigma'} k_\nu j_\mu x_\nu d\sigma_\mu + \int_{\Sigma_1} k_\nu j_\mu x_\nu d\sigma_\mu$$

L'intégrale d'hyperparoi sur Σ_1 , est nulle puisque $j_\mu d\sigma_\mu = 0$. D'autre part les quantités k_ν , j_μ , x_ν , $d\sigma_\mu$ étant des vecteurs, chaque élément

différentiel $k_j x_\mu d\sigma_\mu$ est un scalaire qui garde la même valeur quel que soit le référentiel auquel on rapporte les quatre vecteurs qui le constituent.

Rapportons les vecteurs contenus dans la première intégrale de surface au référentiel $\Pi\Lambda$. La seule composante non nulle de $d\sigma_\mu$ sera la composante de temps $d\sigma_4 = icd\nu$ et on aura $\left(\int_\Sigma k_j x_\mu d\sigma_\mu\right)_{\Pi\Lambda} = \left(k_\nu \int_\Sigma j_4 x_\nu icd\nu\right)_{\Pi\Lambda}$ c'est-à-dire $ic\left(k_\nu \int_\Sigma j_4 x_\nu d\nu\right)_{\Pi\Lambda} = ic(k_\nu J_{\eta_\nu})_{\Pi\Lambda}$ puisqu'on se trouve dans le référentiel $\Pi\Lambda$.

De même, si nous évaluons la deuxième intégrale de surface dans le référentiel $\Pi'\Lambda'$, en remarquant qu'alors la seule composante non nulle de $d\sigma_\mu$ est $d\sigma_4 = -icd\nu$, l'intégrale devient :

$$-ic\left(k_\nu \int_{\Sigma'} j_4 x_\nu d\nu\right)_{\Pi'\Lambda'} = -ic(k_\mu J_{\eta'_\mu})_{\Pi'\Lambda'}$$

k_μ et η'_μ étant cette fois, bien entendu, évalués dans le référentiel $\Pi'\Lambda'$.

Le deuxième membre de l'équation (2) se réduit donc à la différence $icJ[(k_\nu \eta_\nu)_{\Pi\Lambda} - (k_\mu \eta'_\mu)_{\Pi'\Lambda'}]$.

Si le point étudié était indépendant de l'hyperplan choisi, η_ν et η'_μ représenteraient les composantes d'un même vecteur dans les deux référentiels $\Pi\Lambda$ et $\Pi'\Lambda'$ et comme k_ν est aussi un vecteur, l'expression $k_\nu \eta_\nu$, produit scalaire de deux vecteurs, serait indépendante du référentiel utilisé pour l'évaluer

$$(k_\nu \eta_\nu)_{\Pi\Lambda} = (k_\mu \eta'_\mu)_{\Pi'\Lambda'}.$$

La condition d'invariance du point η_ν est donc que le premier membre de l'équation (2) soit nul quel que soit k_ν :

$$\int_\Omega k_\nu j_\nu d\omega = k_\nu \int_\Omega j_\nu d\omega.$$

Mais cette fois, l'intégrale est un vecteur et la condition pour que son produit scalaire par le vecteur arbitraire k_ν soit nul, est que ce vecteur lui-même soit nul :

$$\int_\Omega j_\nu d\omega = 0.$$

Or, cela fait quatre équations indépendantes, alors que nous n'avons introduit que deux conditions :

$$\eta_4 = \eta'_4 \quad \text{et} \quad \partial_\mu j_\mu = 0.$$

La condition requise n'est donc pas vérifiée en général et le point η_ν dépend du référentiel auquel nous rapportons la masse fluide.

Étudions la vitesse d'espace d'un pseudocentre de matière quelconque relativement à son référentiel de définition.

Si $x_4 = ict$ est la quatrième coordonnée comptée suivant l'axe Λ , la vitesse d'espace du point dont les coordonnées d'espace dans l'hyperplan Π sont η_k , est

$$V_k = \frac{d\eta_k}{dt} = ic \frac{d\eta_k}{dx_4}.$$

Évaluons $JV_k = ic \frac{d}{dx_4} (J\eta_k)$ puisque $\frac{dJ}{dt} = 0$.

En tenant compte de la relation définissant η_k et en nous souvenant que le domaine d'intégration varie au cours du temps, il vient

$$JV_k = ic \frac{d}{dx_4} \left(\frac{1}{ic} \int_{\Sigma} j_4 x_k d\nu \right) = \int_{\Sigma} \partial_4 (j_4 x_k) d\nu + \int_{\Sigma} \frac{1}{ic} j_4 x_k \nu_i ds_i$$

Σ étant la surface de la goutte dans le référentiel Σ .

x_4 et x_k étant des variables indépendantes, on a $\partial_4 (j_4 x_k) = x_k \partial_4 j_4$ et, en tenant compte de la relation de conservation $\partial_\mu j_\mu = 0$, on a : $\partial_4 j_4 = -\partial_i j_i$.

Enfin, en intégrant par parties :

$$x_k \partial_4 j_4 = -x_k \partial_i j_i = -\partial_i (x_k j_i) + j_i \delta_{ik}.$$

D'où :

$$JV_k = - \int_{\Sigma} \partial_i (x_k j_i) d\nu + \int_{\Sigma} j_k d\nu + \int_{\Sigma} j_i \otimes x_k V_i ds_i.$$

Le premier terme fournit une intégrale de surface qui, réunie avec le dernier, donne : $\int_{\Sigma} (j_i \otimes V_i - j_i) x_k ds_i$, qui est nulle puisque $j_i = j_i \otimes V_i$. Il reste donc :

$$JV_k = \int_{\Sigma} j_k d\nu.$$

Ainsi la vitesse du pseudocentre de matière dans son référentiel de définition est

$$V_k = \frac{1}{J} \int_{\Sigma} j_k d\nu.$$

Ces trois expressions qui, dans l'hyperplan Π , se comportent comme les composantes d'un vecteur d'espace relativement à une rotation des axes d'espace, dépendent au contraire de façon compliquée du choix de l'hyperplan Π , car, lors d'un changement de ce plan correspondant à une transformation de Lorentz, chaque j_k se transforme comme les composantes d'espace d'un quadrivecteur, mais en outre l'intégration ne se fait plus sur le même domaine. On a affaire à des j_k qui se trouvent

en des points différents, et il est en général impossible de préciser la dépendance des V_k par rapport au choix de l'hyperplan Π , sans connaître tous les détails du mouvement du fluide.

§ 3. Densité d'énergie-impulsion et de moment de rotation.

Introduisons maintenant de nouvelles grandeurs relatives aux lois *dynamiques* qui régissent et achèvent de déterminer le mouvement du fluide. On sait que l'hydrodynamique relativiste exprime les propriétés d'un fluide matériel classique au moyen d'un tenseur qui représente la densité d'énergie-impulsion totale et qui se compose de deux termes :

$$t_{\mu\nu} = \rho m_0 u_\mu u_\nu + \theta_{\mu\nu} \quad (\text{voir Appendice B})$$

ρ et u_μ ont la même signification que plus haut, m_0 est la masse propre individuelle des molécules, supposées identiques, $\theta_{\mu\nu}$ le tenseur des tensions internes qui est un tenseur d'espace propre ($\theta_{\mu\nu} u_\nu = \theta_{\mu\nu} u_\mu = 0$) et qui joue le rôle de potentiel de la densité de force $f_\mu = -\partial_\nu \theta_{\mu\nu}$.

Rapportées au système propre local, les composantes du tenseur d'énergie-impulsion sont respectivement :

$$t_{ij}^0 = \theta_{ij}^0$$

(c'est-à-dire le tenseur des tensions internes tel qu'il est défini ordinairement en dynamique non relativiste),

$$t_i^\circ \otimes = t^\circ \otimes_i = 0 \quad \text{et} \quad t^\circ \otimes \otimes = \rho m_0$$

(c'est-à-dire la densité de masse propre). La loi fondamentale de l'hydrodynamique s'exprime alors sous forme relativiste par le caractère *conservatif* du tenseur d'énergie-impulsion :

$$\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$$

soit $\partial_\nu (\rho m_0 u_\mu u_\nu) = -\partial_\nu \theta_{\mu\nu}$.

En effet, si nous remarquons que le produit $\rho m_0 u_\mu$ qui apparaît dans le premier membre n'est autre que la densité d'impulsion relativiste g_μ et si nous faisons intervenir d'autre part la force de tension rapportée à l'unité de volume $f_\mu = -\partial_\nu \theta_{\mu\nu}$ conformément aux conceptions habituelles, il vient :

$$\partial_\nu (g_\mu u_\nu) = \dot{g}_\mu = f_\mu \quad (\text{voir Appendice A}).$$

Si nous multiplions par l'élément d'hypervolume $d\omega$ et que nous inté-

grons sur l'hypertube balayé par une gouttelette infinitésimale dans l'intervalle de temps propre $d\tau$, on a :

$$\int_{\omega} \dot{g}_{\mu} d\omega = \int_{\omega} f_{\mu} d\omega.$$

Or on sait (appendice A) que, si on introduit l'impulsion totale de la gouttelette $G_{\mu} = \int_{V_0} g_{\mu} d\nu^0$ on peut écrire $\int_{\omega} \dot{g}_{\mu} d\omega = \left(\frac{d}{d\tau} G_{\mu} \right) d\tau$.

Et d'autre part, si on prend l'intervalle de temps $d\tau$ suffisamment petit, on aura également :

$$\int_{\omega} f_{\mu} d\omega = d\tau \int_{V_0} f_{\mu} d\nu^0 = d\tau F_{\mu}$$

en appelant F_{μ} la force relativiste totale exercée sur la gouttelette par les tensions du fluide environnant : $F_{\mu} = \int_{V_0} f_{\mu} d\nu^0$.

Si bien que l'intégration sur l'hypertube considéré, de l'équation de conservation $\partial_{\lambda} t_{\mu\nu} = 0$ traduit simplement la relation :

$$\boxed{\dot{G}_{\mu} = F_{\mu}}$$

c'est-à-dire le *théorème relativiste de la quantité de mouvement* pour la gouttelette.

D'autre part, les tensions introduites par la dynamique classique sont supposées dériver d'un tenseur $\theta_{\mu\nu}$ *symétrique*. Et comme le terme $\rho m_0 u_{\mu} u_{\nu}$ est également symétrique, la théorie classique ne considère que des tenseurs d'énergie-impulsion symétriques. Il est facile de voir que cette hypothèse revient à introduire un nouveau tenseur *conservatif*, la *densité de moment de rotation*

$$\boxed{m_{[\mu\nu]\lambda} = x_{\mu} t_{\nu\lambda} - x_{\nu} t_{\mu\lambda}}$$

qui est du troisième ordre et antisymétrique en μ et ν . En effet sa divergence est :

$$\partial_{\lambda} m_{\mu\nu\lambda} = x_{\mu} \partial_{\lambda} t_{\nu\lambda} - x_{\nu} \partial_{\lambda} t_{\mu\lambda} + \delta_{\mu\lambda} t_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda} t_{\mu\lambda}.$$

Les deux premiers termes sont nuls puisque $t_{\mu\nu}$ est conservatif. Les deux derniers expriment simplement la partie antisymétrique $t_{\nu\mu} - t_{\mu\nu}$ du tenseur d'énergie-impulsion. Si celui-ci est symétrique, la densité de moment angulaire est conservative, et réciproquement.

On peut alors dégager la signification dynamique du caractère symé-

trique de $t_{\mu\nu}$ suivant la même voie que tout à l'heure. En remplaçant $t_{\mu\nu}$ par son expression, la relation

$$\partial_\lambda m_{\mu\nu\lambda} = 0$$

donne : $\partial_\lambda (x_\mu g_\nu u_\lambda - x_\nu g_\mu u_\lambda) = -\partial_\lambda (x_\mu \theta_{\nu\lambda} - x_\nu \theta_{\mu\lambda})$.

Le premier membre est la dérivée suivant la ligne de courant de l'expression $n_{[\mu\nu]} = x_\mu g_\nu - x_\nu g_\mu$; c'est-à-dire du moment de l'impulsion g_μ .

Le second membre se réduit — en tenant compte du caractère symétrique du tenseur des tensions $\theta_{\mu\nu}$ — à $x_\mu \partial_\lambda (-\theta_{\nu\lambda}) - x_\nu \partial_\lambda (-\theta_{\mu\lambda})$; c'est-à-dire à $x_\mu f_\nu - x_\nu f_\mu = \gamma_{\mu\nu}$, qui est le moment du couple des tensions internes rapporté à l'unité de volume.

On a ainsi : $\dot{n}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$.

Enfin si on intègre sur l'élément d'hypertube de tout à l'heure, on pose : $\int_{V_0} n_{\mu\nu} dv_0 = M_{\mu\nu}$ (moment angulaire interne de la gouttelette) $\int_{V_0} \gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$ (couple de torsion total), et la condition $t_{\mu\nu} = t_{\nu\mu}$ ou $\partial_\lambda m_{\mu\nu\lambda} = 0$ est équivalente à

$$\dot{M}_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$$

c'est-à-dire au *théorème relativiste du moment cinétique* appliqué à la gouttelette.

Pour définir les propriétés dynamiques du fluide fictif que nous sommes en train d'étudier, nous devons, à l'exemple de l'hydrodynamique relativiste classique, introduire un tenseur d'énergie-impulsion $t_{\mu\nu}$ et son moment

$$m_{\mu\nu\lambda} = x_\mu t_{\nu\lambda} - x_\nu t_{\mu\lambda}$$

mais il est inutile de préciser complètement l'expression du tenseur $t_{\mu\nu}$ en fonction des diverses sortes d'énergie comme on vient de le faire pour les fluides matériels.

Nous pouvons nous contenter de poser (voir Appendice B) :

1) Que le tenseur $t_{\mu\nu}$ est conservatif

$$\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$$

2) Qu'il admet u_μ comme vecteur propre :

$$t_{\mu\nu} u_\nu = K u_\mu.$$

3) Qu'il est symétrique :

$$t_{\mu\nu} = t_{\nu\mu}.$$

ou, ce qui revient au même, que le tenseur $m_{\mu\nu\lambda}$ est aussi conservatif

$$\partial_\lambda m_{\mu\nu\lambda} = 0$$

Nous nous souviendrons que ces hypothèses expriment — sous une forme généralisée, mais encore classique — les deux lois fondamentales de la dynamique, conservation de la quantité de mouvement et conservation du moment cinétique, ce qui, avec l'hypothèse donnée au début :

$$\partial_\mu f_\mu = 0$$

qui traduit la loi de la conservation de la matière, achève de caractériser entièrement notre fluide, et de le caractériser comme un fluide *classique*.

§ 4. Impulsion totale.

Nous avons vu comment on représentait par le vecteur $G_\mu = \int_{V_0} g_\mu d\nu^0$ la quantité de mouvement d'une gouttelette *infinitésimale*. Nous allons chercher à étendre cette conception à notre masse fluide *macroscopique*. Remarquons auparavant qu'on aurait pu tout aussi bien définir G_μ par l'intégrale

$$G_\mu = -\frac{1}{c^2} \int_{V_0} t_{\mu\nu} u_\nu d\nu_0.$$

En effet, compte tenu de l'expression de $t_{\mu\nu}$, on aurait :

$$G_\mu = \int_{V_0} \left(-\frac{1}{c^2} g_\mu u_\nu u_\nu - \frac{1}{c^2} \theta_{\mu\nu} u_\nu \right) d\nu^0.$$

Le second terme est nul puisque $\theta_{\mu\nu}$ est dans l'espace propre; et il reste, puisque $u_\nu u_\nu = -c^2$

$$G_\mu = \int_{V_0} g_\mu d\nu^0$$

ce qui est bien l'expression donnée plus haut. Comme à partir de maintenant nous ne précisons plus l'expression de $t_{\mu\nu}$ c'est de la forme

$G_\mu = -\frac{1}{c^2} \int_{V_0} t_{\mu\nu} u_\nu d\nu^0$ que nous devons partir. Mais on rencontre des

difficultés quand on veut généraliser cette forme au cas d'une masse fluide macroscopique. En effet, elle est obtenue en coupant l'hypertube balayé par la gouttelette, par un hyperplan particulier orthogonal au courant, de façon à intégrer sur le volume *propre* de la gouttelette. Ce n'est plus possible dans le cas d'une masse fluide macroscopique. On devra, comme nous l'avons fait à propos des grandeurs cinématiques,

couper l'hypertube macroscopique par un hyperplan Π et intégrer sur le volume Σ qu'il détermine, mais cet hyperplan ne pourra être orthogonal en tous ses points au vecteur u_μ car celui-ci varie d'un point à l'autre. Nous devons donc chercher une définition différente que nous raccorderons avec celle de la gouttelette infinitésimale. Pour cela, remarquons que si, dans le cas infinitésimal, on calcule G_μ dans le référentiel *propre*, l'élément différentiel ne contient plus que des termes $t_{\mu 4}^0 u_4^0 = i c t_{\mu 4}^0$, d'où :

$$G_\mu^0 = -\frac{ic}{c^2} \int_{\Sigma_0} t_{\mu 4}^0 d\nu^0 = \int_{\Sigma_0} t_{\mu}^0 \otimes d\nu^0.$$

Cette expression peut être généralisée au cas d'une masse fluide macroscopique à condition de considérer la coupe Σ de l'hypertube par un hyperplan Π du genre espace *quelconque*. Cet hyperplan et l'axe Λ orthogonal définiront un référentiel de Lorentz et nous écrirons les composantes de la quantité de mouvement (ou impulsion) totale *relativement à ce même référentiel* :

$$G_\mu = \int_{\Sigma} t_{\mu} \otimes d\nu$$

$d\nu$ étant l'élément de volume de l'hyperplan Π .

Nous voyons que G_μ apparaît comme l'intégrale de volume de la quatrième composante d'un tenseur conservatif. On peut chercher à lui appliquer la théorie de Möller. Pour cela, il faut chercher dans

quelles conditions pourra être annulée l'intégrale d'hyperparoi $k_\mu \int_{\Sigma} t_{\mu\nu} d\sigma_\nu$.

Nous allons étudier l'élément différentiel scalaire $d\alpha = k_\mu t_{\mu\nu} d\sigma_\nu$ sur un petit domaine de l'hyperparoi et nous choisirons un système d'axes particulier : nous nous placerons dans le système propre local entraîné par l'élément de surface considéré. Étant donné que $d\sigma$ est orthogonal au courant, on aura dans le système propre $d\sigma_4 = 0$ et on n'aura à considérer que les composantes d'espace propre de $t_{\mu\nu}$ qui sont identiques à celles du tenseur des tensions internes : $d\alpha = k_i^0 \theta_{ij}^0 d\sigma_j^0$.

Nous rapporterons l'espace propre à deux axes $x_k^{(1)}$ $x_k^{(2)}$ tangents à la surface de la goutte, le troisième $x_k^{(3)}$ étant colinéaire à l'élément de surface propre $ds_k^{(0)}$. On a alors :

$$\begin{aligned} d\sigma_k^{0r} &= \frac{i}{c} \varepsilon_{ijk} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} i c d\tau \\ &= \varepsilon_{ijk} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} d\tau = ds_k^0 d\tau. \end{aligned}$$

D'où : $d\alpha = k_i^0 \theta_{ij}^0 ds_j^0 d\tau$.

Pour que l'intégrale soit nulle quelle que soit la forme de la goutte et quel que soit le choix de k_μ , il faut que $\theta_{ij}^0 ds_j^0$ soit nul en chaque point, ou qu'il soit annulé sur toute la surface par une force particulière ne se manifestant que sur la surface. Or il existe effectivement pour les fluides matériels de telles forces, les forces de *tension superficielle*, et il paraît physiquement très raisonnable d'introduire une hypothèse supplémentaire dotant la surface de notre goutte de la propriété de donner naissance à des phénomènes de tension superficielle. On voit d'ailleurs que la quantité $\theta_{ij} ds_j$ (nous omettons à partir de maintenant l'indice 0) représente simplement la force développée par les tensions internes sur l'élément de surface ds_j .

Il faut maintenant montrer qu'il est toujours possible d'équilibrer cette force en chaque point au moyen de tensions superficielles convenables. Donnons cette démonstration (*) qui nécessite l'utilisation du formalisme de la géométrie de Riemann. Nous conserverons les indices latins $i = 1, 2, 3$ pour désigner les coordonnées d'espace et nous utiliserons les indices grecs $\alpha = 1, 2$ pour désigner les coordonnées sur la surface S.

Nous considérerons un système de coordonnées curvilignes $u^i = u^\alpha, u^3$, dont les lignes coordonnées seront orthogonales entre elles et tangentes en chaque point aux trois axes locaux $x^{(1)} x^{(2)} x^{(3)}$ que nous avons définis tout à l'heure. La surface S sera représentée par une équation $u^3 = \text{const.}$

L'élément linéaire qui, dans un système d'axe cartésien quelconque x^i est $ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ (puisque l'espace est euclidien), s'écrira $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, et, étant donné le choix du système de coordonnées, le tenseur métrique sera réduit à ses composantes diagonales g_{11}, g_{22}, g_{33} , les composantes contravariantes étant

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}} \quad g^{33} = \frac{1}{g_{33}}.$$

Si on se borne à des déplacements laissant u^3 constant, on peut définir une métrique sur la surface S : $ds^2 = \gamma_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ et il est visible que les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont identiques aux $g_{\alpha\beta}$. On peut encore définir les composantes de la connexion métrique sur la surface S :

$$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left[\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\lambda} \right].$$

Ces composantes sont les mêmes que les composantes homologues dans

(*) Que nous devons pour l'essentiel à une suggestion de M. Francis Fer.

l'espace. En effet dans ce dernier cas, on a à considérer en outre un terme en g^{i3} mais il est nul puisque $g^{i3} = 0$.

Pour abréger l'écriture, nous allons situer dans la multiplicité riemannienne S des grandeurs qui sont elles-mêmes des *vecteurs* de l'espace et pour lesquelles nous conserverons la notation vectorielle. Ainsi, si nous relions à une origine quelconque O le point courant M de l'espace et que nous posions $\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u_i}$, nous définissons trois vecteurs

orthogonaux de l'espace euclidien qui sont situés sur les axes de coordonnées locaux ($\mathbf{e}_3$ sur la normale à la surface). On peut choisir la mesure des u_i de sorte que ces vecteurs soient unitaires.

Ceci dit, supposons que nous pratiquions sur la surface une incision du^1 . Pour empêcher les lèvres de s'écarter, nous devons exercer sur elles deux forces égales et opposées représentées, avec une orientation convenable, par le vecteur $\mathbf{t}_1 du_1$. De même pour une incision du^2 , on aura une force $\mathbf{t}_2 du_2$, et pour une incision quelconque du^1, du^2 , une force $\mathbf{t}_\beta du^\beta$ (somme sur β). L'ensemble des deux densités linéaires $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ constitue la *tension superficielle*. Considérons d'autre part la force $\mathbf{F} ds \sqrt{\gamma}$, représentation vectorielle de la force $\theta_{ik} d\sigma_k$ exercée sur la surface par les tensions internes. (Comme on est en géométrie Riemannienne, on doit introduire $\sqrt{\gamma}$ où $\gamma = \|\gamma_{\alpha\beta}\| = g_{11} g_{22}$).

Il s'agit de montrer qu'il est possible en général de déterminer une tension superficielle qui équilibre l'action des tensions internes.

Considérons une portion S de la surface limitée par un contour C . L'équilibre s'exprime par les deux équations :

$$\int_C \mathbf{t}_\beta du^\beta + \int_S \mathbf{F} \sqrt{\gamma} ds = 0$$

$$\int_C (\mathbf{OM} \times \mathbf{t}_\beta) du^\beta + \int_S (\mathbf{OM} \times \mathbf{F}) \sqrt{\gamma} ds = 0$$

c'est-à-dire, en vertu du théorème de Stokes :

$$(II-3) \quad \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial u^1} - \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial u^2} + \mathbf{F} \sqrt{\gamma} = 0$$

$$(II-4) \quad \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u^1} \times \mathbf{t}_2 - \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u^2} \times \mathbf{t}_1 \equiv \mathbf{e}_1 \times \mathbf{t}_2 - \mathbf{e}_2 \times \mathbf{t}_1 = 0.$$

Décomposons chacun des vecteurs $\mathbf{t}_\alpha$ sur les trois axes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{t}_1 = n_1 \mathbf{e}_1 + \tau_1 \mathbf{e}_2 + \alpha_1 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \tau_2 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_2 \mathbf{e}_3.$$

En portant ces expressions dans l'équation (4), il vient :

$$\mathbf{e}_1 \times n_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \alpha_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \times n_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \times \alpha_1 \mathbf{e}_3 = 0.$$

Comme on a $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, il reste $(n_1 + n_2) \mathbf{e}_3 - \alpha_2 \mathbf{e}_2 - \alpha_1 \mathbf{e}_1 = 0$.

D'où : $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $n_1 + n_2 = 0$.

Ainsi il résulte de l'équation des couples que les vecteurs $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$ sont dans le plan tangent à la surface. On peut les exprimer par :

$$\mathbf{t}_3 = t_3^\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad \text{avec} \quad t_1^4 = -t_2^3.$$

L'équation (3) devient alors

$$\frac{\partial}{\partial u^1} (t_2^\alpha \mathbf{e}_\alpha) - \frac{\partial}{\partial u^2} (t_1^\alpha \mathbf{e}_\alpha) + \mathbf{F} \sqrt{\gamma} = 0.$$

Or, les vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ étant unitaires, leur dérivée covariante (dans la métrique à trois dimensions) est nulle :

$$\nabla_i \mathbf{e}_\alpha \equiv \partial_i \mathbf{e}_\alpha - \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha \quad \beta \end{matrix} \right\} \mathbf{e}_\beta = 0$$

$$\text{soit } \partial_i \mathbf{e}_\alpha = \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha \quad \beta \end{matrix} \right\} \mathbf{e}_\beta.$$

On a ainsi :

$$\left(\frac{\partial t_2^\alpha}{\partial u^1} - \frac{\partial t_1^\alpha}{\partial u^2} \right) \mathbf{e}_\alpha + t_2^\alpha \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha \quad 1 \end{matrix} \right\} \mathbf{e}_i - t_1^\alpha \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha \quad 2 \end{matrix} \right\} \mathbf{e}_i + \mathbf{F}^i \sqrt{\gamma} \mathbf{e}_i = 0$$

soit, sur les axes $\mathbf{e}_\alpha$:

$$(II-5) \quad \frac{\partial t_2^\alpha}{\partial u^1} - \frac{\partial t_1^\alpha}{\partial u^2} + t_2^\beta \left\{ \begin{matrix} \alpha \quad 1 \\ \beta \end{matrix} \right\} - t_1^\beta \left\{ \begin{matrix} \alpha \quad 2 \\ \beta \end{matrix} \right\} + \mathbf{F}^\alpha \sqrt{\gamma} = 0$$

et sur l'axe $\mathbf{e}_3$

$$t_2^\beta \left\{ \begin{matrix} 3 \\ \beta \quad 1 \end{matrix} \right\} - t_1^\beta \left\{ \begin{matrix} 3 \\ \beta \quad 2 \end{matrix} \right\} + \mathbf{F}^3 \sqrt{\gamma} = 0.$$

Si on ajoute et retranche aux deux équations (5) la quantité

$$t_\lambda^\alpha \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ 2 \quad 1 \end{matrix} \right\} = t_\lambda^\alpha \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ 1 \quad 2 \end{matrix} \right\}$$

on met en évidence la dérivée covariante

$$\nabla_1 t_2^\alpha = \frac{\partial t_2^\alpha}{\partial u^1} + t_2^\beta \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \quad 1 \end{matrix} \right\} - t_\lambda^\alpha \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ 2 \quad 1 \end{matrix} \right\}$$

relative à la métrique à deux dimensions.

On a ainsi le système :

$\nabla_1 t_2^\alpha - \nabla_2 t_1^\alpha + \mathbf{F}^\alpha \sqrt{\gamma} = 0 \quad (2 \text{ équations})$ $t_2^\beta \left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha \quad 1 \end{matrix} \right\} - t_1^\beta \left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha \quad 2 \end{matrix} \right\} + \mathbf{F}^3 \sqrt{\gamma} = 0 \quad (1 \text{ équation})$

soit trois équations pour déterminer les trois quantités $t_1^1 = t_2^2, t_1^2, t_1^3$, lorsqu'on connaît les coefficients de la connexion sur la surface (qui résultent de la forme supposée connue de la surface) et les composantes F^i de la force produite par les tensions internes sur la surface.

Le problème est donc possible en général et on peut supposer l'existence sur la surface de la goutte, de tensions superficielles qui équilibreront en tout point les tensions internes.

Naturellement on supposera que ces tensions superficielles seront comprises, au même titre que les tensions internes, dans l'expression du tenseur d'énergie-impulsion, et par conséquent aussi du vecteur G_μ .

Il résultera de leur présence que l'intégrale $\int k_\mu t_{\mu\nu} d\sigma_\nu$ prise sur l'hyperparoi, est nulle et que par conséquent $k_\mu G_\mu$ est un invariant.

Les mêmes hypothèses permettent également de démontrer que G_μ est constant dans le temps. On sait (Appendice A) qu'on a :

$$\frac{d}{d\tau} (k_\mu G_\mu) = \int_S k_\mu (t_{\mu\lambda} \nu_\lambda - i c t_{\mu k}) d\sigma_k.$$

L'élément différentiel étant scalaire, nous pouvons l'exprimer dans le système propre. Le premier terme est nul puisque $\nu_k^0 = 0$.

Il reste $-i c t_{\mu k}^0 d\sigma_k^0 = -i c \theta_{\mu k}^0 d\sigma_k^0$ et on n'a à considérer que les termes d'espace $\theta_{jk}^0 d\sigma_k^0$.

Or nous savons qu'en tout point de la surface cette quantité est nulle, compte tenu de la tension superficielle. On peut donc appliquer le théorème de Möller, qui montre : d'une part que l'impulsion totale G_μ se transforme comme un *vecteur* lors d'une transformation de Lorentz qui change à la fois les axes de coordonnées et l'hyperplan Π définissant le domaine d'intégration; d'autre part que le vecteur G_μ est *constant* au cours du temps quel que soit l'axe Λ sur lequel le temps est compté :

$$\boxed{\frac{d}{dt} G_\mu = 0}$$

Remarquons que la composante $G_\otimes = \int_\Sigma t_\otimes \otimes d\nu$, intégrale de la densité de masse $t_\otimes \otimes$, représente la masse (ou l'énergie) totale de la goutte. Comme il est bien connu, cette masse varie suivant le référentiel choisi, puisqu'elle est (à *ic* près) la quatrième composante d'un quadri-vecteur. Elle diffère donc profondément de la quantité en apparence analogue $J = \int_\Sigma j_\otimes d\nu$ que nous avons rencontrée dans l'étude ciné-

matique, qui représente la *matière* totale contenue dans la goutte, et qui est au contraire indépendante du référentiel, étant au point de vue tensoriel un invariant. C'est la première — et non la dernière — des différences fondamentales de variance entre les grandeurs cinématiques et les grandeurs dynamiques.

On peut du reste également former un invariant à partir de l'impulsion, en prenant simplement la norme du vecteur G_μ et en posant

$$G_\mu G_\mu = -M_0^2 c^2$$

(le signe — venant de ce que G_μ est du genre temps).

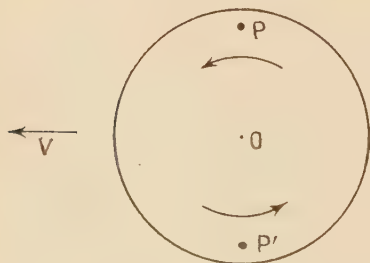
Comme G_μ est constant au cours du temps, il en est de même de son carré, et la quantité M_0 représentera une masse propre totale de la goutte, invariante et constante. Cette quantité, introduite pour la première fois par M. Louis de Broglie ⁽¹⁶⁾ sera appelée *masse propre d'impulsion*.

§ 5. Pseudocentres de masse.

Poursuivons l'analogie avec l'étude cinématique en essayant de définir un barycentre pour l'ensemble de la goutte. Nous « pondérons » chaque point du volume Σ par la densité de masse $t_{\otimes\otimes}$ et nous formons les intégrales

$$G_{\otimes} \xi_k = \int_{\Sigma} t_{\otimes\otimes} x_k d\nu \quad \text{avec} \quad G_{\otimes} = \int_{\Sigma} t_{\otimes\otimes} d\nu$$

qui définissent les coordonnées relativement au référentiel $\Pi\Lambda$ d'un point ξ_k de l'hyperplan Π que nous appellerons *pseudocentre de masse* car c'est un point associé à l'hyperplan Π et changeant avec lui.



La variabilité du pseudocentre de masse avec le référentiel est un fait bien connu ⁽¹²⁾. Montrons-la sur un exemple physique. Considérons une masse tournant sur elle-même, et qui dans un certain référentiel apparaîtra comme une sphère homogène au point de vue de la distribution de la masse,

tournant en bloc autour de son centre O fixe. Le pseudo-centre de masse sera alors évidemment en O .

Considérons ensuite un autre référentiel entraîné vers la gauche par rapport au précédent avec une vitesse ν . Cette vitesse s'ajoutera à la vitesse de rotation des points de l'hémisphère inférieur tels que P' et se retranchera pour les points de l'hémisphère supérieur tels que P. Étant donnée la variation relativiste de la masse avec la vitesse, il en résultera que les masses de l'hémisphère inférieur seront plus grandes dans le nouveau référentiel et les masses de l'hémisphère supérieur plus petites. Au point de vue géométrique, les deux hémisphères seront transformés par la contraction de Lorentz en deux moitiés d'un ellipsoïde aplati de révolution autour de la direction de ν . Elles resteront donc symétriques géométriquement en devenant dissymétriques quant à leur masse. Il en résulte que dans le nouveau référentiel, le pseudocentre de masse ne se trouvera pas au centre géométrique O de l'ellipsoïde, mais sera déporté vers le bas.

Pour préciser ceci mathématiquement, montrons d'abord que les formules de définition du pseudocentre de masse relatif à un certain hyperplan Π caractérisent en fait un quadrivecteur. En effet l'intégrale

$$G_{\otimes} \xi_k = \int_{\Sigma} t_{\otimes \otimes} x_k d\nu \text{ est prise à temps constant } x_4 = \text{constante} = \xi_4.$$

On peut donc écrire une formule analogue

$$G_{\otimes} \xi_4 = \xi_4 \int_{\Sigma} t_{\otimes \otimes} d\nu = \int_{\Sigma} t_{\otimes \otimes} \xi_4 d\nu = \int_{\Sigma} t_{\otimes \otimes} x_4 d\nu.$$

D'où la formule générale :

$$G_{\otimes} \xi_{\mu} = \int_{\Sigma} t_{\otimes \otimes} x_{\mu} d\nu.$$

Le vecteur d'univers ξ_{μ} définit ainsi intrinsèquement et dans tous les référentiels le pseudocentre de masse *relatif à l'hyperplan Π déterminé*, mais, comme nous allons le voir, le second membre n'est pas un vecteur et l'égalité n'est valable que dans le référentiel $\Pi\Lambda$.

Remarquons que $G_{\otimes} \xi_{\mu} = \frac{1}{ic} G_4 \xi_{\mu}$ a la forme de la quatrième composante d'un tenseur. Plus exactement on peut considérer l'expression $M_{\nu 4} = G_{\nu} \xi_4 - G_4 \xi_{\nu}$ comme la quatrième composante d'un tenseur $M_{\mu\nu}$ et nous verrons en effet plus loin qu'il s'agit du moment angulaire total

$$M_{[\mu\nu]} = \int_{\Sigma} (x_{\mu} t_{\nu \otimes} - x_{\nu} t_{\mu \otimes}) d\nu$$

qui est un tenseur indépendamment de l'hyperplan Π et qui, dans chaque référentiel, a pour quatrième composante la quantité $G_{\nu} \xi_4 - G_4 \xi_{\nu}$, où ξ_{ν} désigne le pseudocentre de masse *relatif au référentiel considéré*.

Considérons alors un hyperplan Π , l'axe orthogonal Λ et le pseudo-centre de masse ξ_μ relatif à Π . Choisissons un référentiel R^0 ayant Λ pour axe des temps et tel qu'au temps zéro l'origine des axes coïncide avec le point ξ_μ . Celui-ci aura donc dans le système les coordonnées $\xi_k^0 = 0$ et $\xi_4^0 = 0$.

La composante du moment angulaire total sur l'axe des temps Λ sera donnée par la formule générale $M_{k4}^0 = G_k^0 \xi_4^0 - G_4^0 \xi_k^0$. Elle sera donc nulle.

Effectuons maintenant une transformation de Lorentz pure (sans rotation des axes d'espace) que nous supposerons infinitésimale. Elle s'exprimera par :

$$x_k^1 = x_k^0 + \varepsilon_{k4} x_4^0, \quad x_4^1 = x_4^0 + \varepsilon_{4k} x_k^0$$

avec $\varepsilon_{k4} = -\varepsilon_{4k}$.

Cette transformation nous amènera dans un autre référentiel R^1 qui déterminera en même temps un autre hyperplan Π' coupant l'hyper-tube suivant une coupe Σ' différente de Σ . A cette coupe va correspondre un pseudocentre de masse ξ'_μ , et si nous nous plaçons dans le nouveau référentiel R^1 , il résulte de la propriété signalée pour le moment angulaire total, qu'on aura

$$M_{k4}^1 = G_k^1 (\xi'_4)^1 - G_4^1 (\xi'_k)^1,$$

M_{k4}^1 , G_k^1 , G_4^1 représentant les composantes relativement au nouveau référentiel des *mêmes* tenseurs $M_{\mu\nu}$ et G_μ que tout à l'heure. D'autre part si nous cherchons les coordonnées dans le référentiel R^1 du pseudo-centre ξ_μ relatif à l'ancien hyperplan Π , les formules de Lorentz nous donnent :

$$\begin{aligned} \xi_k^1 &= \xi_k^0 + \varepsilon_{k4} \xi_4^0 = 0 \\ \xi_4^1 &= \xi_4^0 + \varepsilon_{4k} \xi_k^0 = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que si les deux pseudocentres coïncidaient, c'est-à-dire si on avait dans le même référentiel R^1

$$(\xi'_k)^1 = (\xi_k)^1 = 0 \quad \text{et} \quad (\xi'_4)^1 = (\xi_4)^1 = 0,$$

la quatrième composante du moment angulaire total que nous avons supposée nulle dans le référentiel R^0 serait ici $M_{k4}^1 = G_k^1 \xi_4^1 - G_4^1 \xi_k^1$ c'est-à-dire qu'elle serait aussi nulle dans tout référentiel R^1 obtenu par une transformation de Lorentz infinitésimale quelconque. Pour que ce soit vrai, il faudrait que le moment angulaire soit nul intrinsèquement. Ceci confirme ce que nous venons de voir qualitativement : la variabilité du pseudocentre de masse suivant le référentiel est liée

à la rotation de la masse fluide. En général pour une masse fluide en rotation, chaque référentiel comporte son pseudocentre de masse particulier, comme il comporte son pseudocentre de matière particulier. Il est du reste évident que les modes de variation des deux pseudocentres lors d'un changement de référentiel sont profondément différents puisque l'un fait intervenir la masse et sa variation relativiste particulière, tandis que l'autre n'exprime que des propriétés cinématiques.

Comme nous l'avons fait pour le pseudocentre de matière, nous allons étudier la vitesse du pseudocentre de masse relativement à son référentiel de définition. Nous formons la dérivée de $G_{\otimes} \xi_k$ par rapport au temps compté sur l'axe Λ :

$$G_{\otimes} V_k = G_{\otimes} \frac{d}{dt} \xi_k = \frac{d}{dt} (G_{\otimes} \xi_k),$$

puisque la dérivée des composantes de G_{μ} par rapport à n'importe quel temps est nulle.

Comme

$$G_{\otimes} \xi_k = \int t_{\otimes \otimes} x_k d\nu$$

$$G_{\otimes} V_k = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} t_{\otimes \otimes} x_k d\nu = ic \int_{\Sigma} \partial_4 (t_{\otimes \otimes} x_k) d\nu = ic \int_{\Sigma} x_k \partial_4 t_{\otimes \otimes} d\nu = \int_{\Sigma} x_k \partial_4 t_{\otimes 4} d\nu$$

Comme $\partial_{\mu} t_{\otimes \mu} = 0 = \partial_l t_{\otimes l} + \partial_4 t_{\otimes 4}$ il vient $G_{\otimes} V_k = - \int_{\Sigma} x_k \partial_l t_{\otimes l} d\nu$.

On peut intégrer par parties et supprimer la partie toute intégrée qui est prise sur une surface d'espace tout entière dans le vide.

$$G_{\otimes} V_k = \int_{\Sigma} t_{\otimes \otimes} x_k d\nu = \int_{\Sigma} t_{\otimes l} \delta_{lk} d\nu = \int_{\Sigma} t_{\otimes k} d\nu = \int_{\Sigma} t_{k \otimes} d\nu$$

(puisque $t_{\mu\nu}$ est symétrique) ou enfin

$$\boxed{G_{\otimes} V_k = G_k}$$

La vitesse d'espace du pseudocentre de masse relativement à son référentiel de définition est donnée par $V_k = \frac{G_k}{G_{\otimes}}$. Comme G_k et $G_{\otimes}$ sont constants au cours du temps, V_k est *constante*.

On voit que, dans chaque référentiel, le pseudocentre de masse jouit de la propriété fondamentale qui, en dynamique non relativiste, caractérise le barycentre : en l'absence de forces extérieures, son mouvement est *rectiligne* et *uniforme*.

On peut de même montrer la signification simple de la relation $G_{\otimes} V_k = G_k$.

En effet, on peut en tirer l'expression de la vitesse unitaire ω_μ du pseudocentre de masse dont les composantes, dans le référentiel de définition seront :

$$\begin{aligned} \omega_k &= \alpha V_k \quad \text{et} \quad \omega_4 = \alpha ic \quad \text{avec} \quad \alpha = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \\ v^2 &= V_k V_k = -c^2 \frac{G_k G_k}{G_4^2} \\ 1 - \frac{v^2}{c^2} &= 1 + \frac{G_k G_k}{G_4^2} = \frac{G_\mu G_\mu}{G_4^2} = -\frac{M_0^2 c^2}{G_4^2} = \frac{M_0^2}{G_\otimes^2} \\ \alpha &= \frac{G_\otimes}{M_0} \quad \text{d'où} \quad \omega_k = \frac{G_\otimes}{M_0} \frac{G_k}{G_\otimes} = \frac{G_k}{M_0} \quad \text{et} \quad \omega_4 = \frac{G_\otimes}{M_0} ic = \frac{G_4}{M_0} \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire simplement :

$$M_0 \omega_\mu = G_\mu.$$

C'est l'expression relativiste ordinaire de l'impulsion d'univers pour un *point matériel* de masse propre M_0 .

Il semblerait donc que nous puissions généraliser à un traitement relativiste la propriété essentielle du barycentre de la dynamique non relativiste qui consiste dans la possibilité de décrire certains caractères du mouvement global d'un système matériel en se bornant à considérer un *point matériel* situé au barycentre et ayant pour masse la masse totale du système. Mais en réalité il n'en est rien, car nous savons que le pseudocentre de masse, malgré les relations dynamiques auxquelles il obéit, ne peut en aucune manière être considéré comme un point matériel, puisque ses coordonnées ne sont pas covariantes. Il est une fiction mathématique, au même titre que le pseudocentre de matière et ne peut jouer le rôle ni d'un « objet » matériel, ni même d'un « objet » géométrique.

Cependant la forme covariante que nous venons de donner à la vitesse nous invite à étendre la signification de la notion de pseudocentre de masse. Considérons un référentiel Σ . A chaque instant $t = \frac{x_4}{ic}$ la goutte possèdera relativement à ce référentiel un pseudocentre de masse bien déterminée par ses coordonnées ξ_k . On peut le caractériser, dans le référentiel Σ par un point d'univers $\xi_\mu = \xi_k, x_4$.

Mais ce même point peut être repéré dans n'importe quel autre référentiel Σ' en appliquant simplement aux ξ_μ la transformation de Lorentz faisant passer de Σ à Σ' . ξ_μ est alors considéré comme un vecteur d'univers définissant un point *intrinsèque* dans tous les référentiels. Naturellement le point ξ_μ n'est pseudocentre de masse que relativement au référentiel Σ dans lequel il a été défini. Dans le référentiel Σ' on définit

de même d'autres coordonnées ξ'_μ qui vont situer un autre point d'univers distinct de ξ_μ . D'après cette nouvelle conception, il existe donc une infinité de pseudocentres de masse. La relation covariante que nous venons d'établir :

$$M_0 v_\mu = G_\mu$$

montre que tous les pseudocentres de masse ont même vitesse d'univers. En particulier si on se place dans le référentiel particulier où les composantes d'espace G_k de l'impulsion sont nulles (*référentiel d'inertie*), on voit que tous les pseudocentres de masse ont une vitesse d'espace nulle : tous les pseudocentres de masse sont au repos dans le référentiel d'inertie.

§ 6. Moment angulaire total et moment angulaire interne

Après les notions dynamiques définies à partir du tenseur d'énergie impulsion, nous allons introduire celles qui sont formées à l'aide du tenseur densité de moment de rotation $m_{[\mu\nu]\lambda} = x_\mu t_{\nu\lambda} - x_\nu t_{\mu\lambda}$.

Nous avons défini plus haut la *moment angulaire total* d'une gouttelette infinitésimale par

$$M_{\mu\nu} = \int_{V_0} (x_\mu g_\nu - x_\nu g_\mu) d\nu_0.$$

Cette expression peut aussi s'écrire plus généralement

$$M_{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2} \int_{V_0} m_{\mu\nu\lambda} u_\lambda d\nu_0$$

et c'est cette forme que nous utiliserons. En effet, en tenant compte de l'expression de $m_{\mu\nu\lambda} = x_\mu t_{\nu\lambda} - x_\nu t_{\mu\lambda}$ et de celle de $t_{\mu\nu} = g_\mu u_\nu + \theta_{\mu\nu}$ ($\theta_{\mu\nu} u_\nu = 0$) employée plus haut, il vient :

$$M_{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2} \int_{V_0} [(x_\mu g_\nu u_\lambda - x_\nu g_\mu u_\lambda) u_\lambda + (x_\mu \theta_{\nu\lambda} - x_\nu \theta_{\mu\lambda}) u_\lambda] d\nu_0$$

Le deuxième terme est nul ($\theta_{\nu\lambda} u_\lambda = \theta_{\mu\lambda} u_\lambda = 0$) et en tenant compte de $u_\lambda u_\lambda = -c^2$ il reste :

$$M_{\mu\nu} = \int_{V_0} (x_\mu g_\nu - x_\nu g_\mu) d\nu_0$$

Comme tout à l'heure, nous remarquons qu'on ne peut étendre directement cette définition au cas macroscopique, étant donné qu'il n'existe pas d'hyperplan Π qui corresponde à l'espace *propre* en tout point.

Nous rapporterons la définition précédente au référentiel propre de la gouttelette infinitésimale, c'est-à-dire à l'hyperplan même sur lequel on intègre :

$$M_{\mu\nu}^0 = -\frac{ic}{c^2} \int_{V_0} (x_\mu^0 t_{\nu 4}^0 - x_\nu^0 t_{\mu 4}^0) d\nu_0 = \int_{V_0} m_{\mu\nu}^0 \otimes d\nu_0$$

et nous généralisons à un hyperplan quelconque Π en supposant explicitement les tenseurs rapportés au référentiel défini par Π :

$$M_{[\mu\nu]} = \int_{\Sigma} (x_{\mu} t_{\nu} \otimes - x_{\nu} t_{\mu} \otimes) d\nu$$

Sous cette forme qui ne fait plus intervenir l'espace propre, la définition du moment angulaire interne peut être généralisée à une masse fluide macroscopique.

Comme $\partial_{\lambda}(x_{\mu} t_{\nu\lambda} - x_{\nu} t_{\mu\lambda}) = \partial_{\lambda} m_{\mu\nu\lambda} = 0$ nous retrouvons encore une fois l'intégrale de volume de la quatrième composante d'un tenseur conservatif et nous pouvons appliquer le théorème de Möller (Appendice A). On voit du reste tout de suite, en vertu des hypothèses que nous avons faites sur la tension superficielle, que l'intégrale d'hyperparoi $\int_{\Pi} k_{\mu\nu} m_{\mu\nu\lambda} d\sigma_{\lambda}$ sera nulle. En effet si on exprime l'élément différentiel scalaire relativement aux trois axes $x^{(1)} x^{(2)} x^{(3)}$ du système propre local que nous avons déjà considéré, on fait apparaître la quantité :

$$m_{\mu\nu k}^0 ds_k^0 d\tau = (x_{\mu}^0 t_{\nu k}^0 ds_k^0 - x_{\nu}^0 t_{\mu k}^0 ds_k^0) d\tau$$

dont les deux termes sont nuls séparément en tout point, pourvu qu'on comprenne dans l'expression du tenseur d'énergie-impulsion sur la surface, l'énergie-impulsion de tension superficielle que nous avons introduite précédemment.

De même on montre facilement que le scalaire $k_{\mu\nu} M_{\mu\nu}$ (et par conséquent le tenseur $M_{\mu\nu}$) est constant dans le temps. On a en effet :

$$\frac{d}{dt} (k_{\mu\nu} M_{\mu\nu}) = \int_{\mathbf{s}} k_{\mu\nu} (m_{\mu\nu 4} v_k - i c m_{\mu\nu k}) ds_k.$$

En évaluant l'élément différentiel dans le référentiel propre, il ne reste que $-k_{\mu\nu} i c m_{\mu\nu k}^0 ds_k^0$ quantité qui est nulle, compte tenu de la tension superficielle, comme nous venons de le montrer. On peut donc conclure : d'une part, le moment angulaire total a la variance d'un *tenseur* antisymétrique du 2^e ordre, indépendamment du choix de l'hyperplan Π , pourvu que les axes d'espace du référentiel adopté soient choisis chaque fois dans cet hyperplan ; d'autre part, le tenseur $M_{\mu\nu}$ est *constant* au cours du temps, quel que soit l'axe de temps adopté :

$$\frac{d}{dt} M_{\mu\nu} = 0$$

La signification physique des composantes d'espace

$$M_{ij} = \int_{\Sigma} (x_i t_{j\otimes} - x_j t_{i\otimes}) d\nu$$

est claire, si on se souvient que les composantes $t_{j\otimes}$ représentent de façon relativiste la densité d'impulsion. M_{ij} est donc un *moment cinétique relatif à l'origine*, du moins si on suppose que l'origine se trouve dans la même coupe d'espace que la goutte instantanée Σ , c'est-à-dire que le temps constant x_4 est nul, ce qu'on peut toujours supposer.

Au contraire le rôle des composantes de temps

$$M_{i\otimes} = \int_{\Sigma} (x_i t_{\otimes\otimes} - x_{\otimes} t_{i\otimes}) d\nu$$

n'apparaît pas au premier coup d'œil. Mais si on sépare les deux termes, on voit que $M_{i\otimes}$ fait intervenir le pseudocentre de masse. En effet :

$$\int_{\Sigma} x_i t_{\otimes\otimes} d\nu = G_{\otimes} \xi_i.$$

Quant à la deuxième intégrale, comme elle est prise à temps constant, on peut poser $x_{\otimes} = \xi_{\otimes}$ et on obtient $\xi_{\otimes} \int_{\Sigma} t_{i\otimes} d\nu = \xi_{\otimes} G_i$ d'où finalement $M_{i\otimes} = G_{\otimes} \xi_i - G_i \xi_{\otimes}$.

C'est la relation que nous avons utilisée plus haut de façon anticipée pour montrer la variation du pseudocentre de masse avec le référentiel.

Cette relation se simplifie si on choisit l'origine dans l'hyperplan Π en changeant l'origine des temps : $\xi_{\otimes} = 0$ et il reste

$$M_{i\otimes} = G_{\otimes} \xi_i$$

c'est-à-dire, comme il est bien connu ⁽¹⁾, les composantes du *moment barycentrique rapporté à la position initiale du pseudocentre de masse*.

M. Louis de Broglie a souvent insisté sur le fait qu'en relativité le moment cinétique par rapport à l'origine arbitraire des axes de coordonnées n'a pas de signification physique particulière. La quantité importante est le moment cinétique *propre* relatif à un point lié à la goutte fluide, se déplaçant avec elle et caractérisé par une propriété physique déterminée ⁽¹⁾. Le choix de ce point qui devra jouer d'un certain point de vue le rôle de « centre » de la goutte, présente certaines difficultés. Nous les aborderons tout à l'heure. Pour le moment, nous supposons qu'on a pu définir d'une certaine manière un point déterminé C lié à la goutte et indépendant du référentiel. Nous appellerons *moment angulaire interne* $S_{\mu\nu}$ le tenseur obtenu de la même manière

que $M_{\mu\nu}$, mais en prenant comme origine indépendamment du référentiel le point C dont nous désignerons les coordonnées, covariantes par définition, par Y_μ . On aura alors, dans le référentiel déterminé par l'hyperplan Π sur lequel on intègre :

$$S_{\mu\nu} = \int_{\Sigma} [(x_\mu - Y_\mu) t_{\nu\otimes} - (x_\nu - Y_\nu) t_{\mu\otimes}] d\nu.$$

En séparant les termes en x et les termes en Y :

$$(II-6) \quad \begin{aligned} S_{\mu\nu} &= \int_{\Sigma} (x_\mu t_{\nu\otimes} - x_\nu t_{\mu\otimes}) d\nu - Y_\mu \int_{\Sigma} t_{\nu\otimes} d\nu + Y_\nu \int_{\Sigma} t_{\mu\otimes} d\nu. \\ \boxed{S_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu} - Y_\mu G_\nu + Y_\nu G_\mu} \end{aligned}$$

Comme les trois termes du deuxième membre sont des tenseurs indépendamment de l'hyperplan Π choisi, il en résulte que $S_{\mu\nu}$ est aussi un tenseur.

§ 7. Équations fondamentales. — Centre de masse.

Étant donné la qualité de « centre » de la masse fluide que nous avons attribuée au point C, il est naturel d'introduire le temps propre τ du point C comme *temps propre moyen* de la masse fluide. Si dans le référentiel $\Pi\Lambda$, le point C considéré possède une vitesse d'espace V_k il est facile de former : $\alpha = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ et de calculer les quantités $U_k = \alpha V_k$ et $U_4 = \alpha ic$ qui sont les composantes dans le référentiel $\Pi\Lambda$ de la vitesse unitaire U_μ du point C. Cette vitesse unitaire est un quadrivecteur à condition que C soit un point intrinsèque dont les coordonnées se transforment suivant les formules de Lorentz lors d'un changement de référentiel. On passe alors du temps t relatif au référentiel $\Pi\Lambda$ au temps propre τ par $\frac{dt}{d\tau} = \frac{U_4}{ic} = \alpha$.

Nous allons maintenant dériver l'équation (6) *par rapport au temps propre* τ . Sachant que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} G_\mu &= \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d}{dt} G_\mu = 0, \\ \frac{d}{d\tau} M_{\mu\nu} &= \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d}{dt} M_{\mu\nu} = 0, \quad \frac{d}{d\tau} Y_\mu = U_\mu, \end{aligned}$$

il vient, en désignant par un point la dérivée par rapport au propre :

$$\boxed{\dot{S}_{\mu\nu} = G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu}$$

formule dans laquelle on reconnaît le deuxième groupe des équations

de Frenkel-Weyssenhoff, et à laquelle on peut immédiatement adjoindre le premier groupe, exprimé par

$$\dot{G}_\mu = 0$$

que nous venons de rappeler.

Nous devons encore signaler une particularité importante du moment angulaire interne. Si on prend sa composante de temps dans le référentiel $\Pi\Lambda$:

$$S_{k\otimes} = \int_{\Sigma} [(x_k - Y_k)t_{\otimes\otimes} - (x_{\otimes} - Y_{\otimes})t_{k\otimes}] d\nu.$$

Comme l'intégration est faite à temps constant sur l'hyperplan Π et que le point C, centre de la masse fluide considérée à un instant donné, se trouve forcément aussi dans cet hyperplan, on a $x_{\otimes} = Y_{\otimes}$ et le deuxième terme est nul. Il reste

$$S_{k\otimes} = \int_{\Sigma} (x_k - Y_k)t_{\otimes\otimes} d\nu = \int_{\Sigma} x_k t_{\otimes\otimes} d\nu - Y_k \int_{\Sigma} t_{\otimes\otimes} d\nu$$

c'est-à-dire

$$S_{k\otimes} = G_{\otimes} \xi_k - Y_k G_{\otimes}$$

ou encore

(II-7)

$$S_{k\otimes} = G_{\otimes} (\xi_k - Y_k)$$

Ainsi : dans un référentiel quelconque, les composantes de temps du moment angulaire propre relatif à un point *intrinsèque quelconque*, constituent un vecteur d'espace colinéaire et proportionnel au vecteur joignant ce point au pseudocentre de masse relatif au référentiel considéré.

Nous pouvons chercher à donner à cette relation une forme covariante. Pour cela, nous remarquerons que, puisque le point C est un point intrinsèque, sa vitesse U_μ est un quadrivecteur bien déterminé et on peut toujours trouver un référentiel Σ_0 déterminé (à une rotation d'espace près) dans lequel le point C soit au repos. L'hyperplan Π_0 sera orthogonal au quadrivecteur U_μ . Nous appellerons ce référentiel *référentiel propre moyen* de la masse fluide. Si nous écrivons la relation précédente dans le système Σ_0 en la multipliant par $U_k^0 = ic$ on a $S_{k\otimes}^0 ic = G_{\otimes}^0 ic (\xi_k^0 - Y_k^0)$ ou encore $S_{k\otimes}^0 U_k^0 = G_{\otimes}^0 U_k^0 (\xi_k^0 - Y_k^0)$ en indiquant par l'indice ^{0} placé en haut les composantes rapportées au système Σ_0 .

On peut du reste remarquer que

$$S_{kk}^0 = 0 \quad (\text{antisymétrie})$$

et

$$\xi_k^0 - Y_k^0 = 0 \quad (\text{simultanéité})$$

si bien qu'on peut écrire tout aussi bien :

$$S_{\mu 4}^0 U_4^0 = G_4^0 U_4^0 (\xi_\mu^0 - Y_\mu^0).$$

Mais comme dans le système Σ_0 les composantes d'espace U_k^0 sont nulles, les quantités $S_{\mu 4}^0 U_4^0$ et $G_4^0 U_4^0$ ne sont autres que l'expression dans le référentiel Σ_0 des produits tensoriels contractés $S_{\mu\nu} U_\nu$ et $G_\nu U_\nu$.

On peut donc écrire :

$$(S_{\mu\nu} U_\nu)^0 = (G_\nu U_\nu)^0 (\xi_\mu^0 - Y_\mu^0).$$

Pour rendre cette équation covariante, nous devons considérer que les ξ_μ^0 sont les coordonnées dans le système propre d'un point *intrinsèque* défini, comme nous l'avons dit, dans tous les autres systèmes par des transformations de Lorentz convenables. Ce point sera appelé *centre de masse* proprement dit X_μ et ne sera pseudocentre de masse que pour une coupe d'espace propre. En outre, nous devons remarquer que le « centre » C de la goutte est en général accéléré. Le référentiel propre galiléen dans lequel il est au repos à l'instant t sera naturellement non-acceléré. Aussi à l'instant t' , le point C n'y sera plus au repos, il faudra considérer un référentiel propre différent. Comme à chaque instant le centre de masse est défini relativement au référentiel propre *relatif à cet instant*, il en résulte que le centre de masse n'est pas un pseudocentre de masse. Il coïncide au cours du temps avec toute une série de pseudocentres successifs. Ce serait une grosse erreur de lui appliquer la formule des vitesses établies pour les pseudocentres. En particulier il n'est nullement au repos dans le référentiel d'inertie.

Moyennant ces hypothèses, l'égalité

$$(S_{\mu\nu} U_\nu)^0 = (G_\nu U_\nu)^0 (X_\mu^0 - Y_\mu^0)$$

est dès lors une équation tensorielle, elle est vraie dans n'importe quel référentiel. On peut l'écrire de façon covariante

$$S_{\mu\nu} U_\nu = G_\nu U_\nu (X_\mu - Y_\mu).$$

Enfin le produit contracté $G_\nu U_\nu$ est un invariant important que nous écrirons avec Weyssenhoff

$$G_\nu U_\nu = - \mathfrak{M}_0 c^2$$

en faisant apparaître une nouvelle masse propre $\mathfrak{M}_0$ différente de M_0 , qui n'est pas en général constante dans le temps, et que nous appellerons *masse propre d'inertie*.

Il vient donc finalement :

$$S_{\mu\nu} U_\nu = \mathfrak{M}_0 c^2 (Y_\mu - X_\mu)$$

Il est remarquable que les deux formules établies pour $\dot{S}_{\mu\nu}$ et $S_{\mu\nu}U_\nu$ ne font intervenir aucune propriété particulière pour le point C, autre que d'être un point *intrinsèque* défini par des coordonnées covariantes. Il n'en est pas moins évident que le moment angulaire propre ne peut avoir de signification physique que si le point C est déterminé à partir des propriétés de la goutte fluide, ou au moins s'il est lié d'une façon quelconque à la « forme » que remplit cette goutte. Ce sont les problèmes soulevés par ce choix déterminé du point C qu'il nous reste à aborder.

§ 8. Référentiel fondamental.

La recherche en hydrodynamique relativiste de points pouvant jouer pour une masse fluide macroscopique un rôle analogue à celui du centre de gravité de la dynamique non relativiste, a fait l'objet de nombreux travaux ^(12, 13). Ils se sont toujours heurtés au fait que les intégrales définissant les coordonnées du point doivent nécessairement être prises sur un des « volumes » de la masse fluide, coupes du tube d'univers par un hyperplan d'espace lié au référentiel choisi, et qu'alors les coordonnées obtenues varient lorsqu'on change de référentiel, comme nous l'avons vu à propos du pseudocentre de matière et du pseudocentre de masse. Il n'est jamais possible de réduire ces intégrales aux seules intégrales de volume covariantes qui sont les intégrales des quatrièmes composantes d'un tenseur conservatif (voir Appendice A). C'est pourquoi nous adopterons une voie différente et moins ambitieuse. Nous choisirons un point C défini en relation avec les propriétés de la goutte fluide, *dans un référentiel déterminé*. Et nous supposerons en outre que ce point est intrinsèque, c'est-à-dire que nous obtiendrons ses coordonnées dans les autres référentiels par les formules de transformation de Lorentz, étant entendu que, dans ces autres référentiels, il ne jouira plus de sa propriété de définition. C'est ce procédé que nous avons déjà employé pour définir le centre de masse.

Nous sommes ainsi ramenés au problème de la recherche d'un *système de référence particulier* défini à partir des propriétés de la goutte fluide.

Il convient de raisonner par analogie avec le cas d'une gouttelette infinitésimale, car pour celle-ci, on aperçoit tout de suite un tel référentiel : le *référentiel propre local*, orthogonal à l'hypertube infinitésimal. Ce référentiel est défini par un hyperplan Π_0 d'espace et l'axe de temps Λ_0 orthogonal, dont nous allons récapituler les propriétés, car celles-ci

peuvent avoir des significations différentes quand on passe au cas d'une masse fluide macroscopique :

- 1) Le centre de la gouttelette est au repos dans l'hyperplan Π_0 .
- 2) L'hyperplan Π_0 est orthogonal au courant local j_μ .
- 3) L'hyperplan Π_0 est orthogonal à l'impulsion locale g_μ colinéaire à j_μ .

Considérons maintenant une masse fluide macroscopique. Coupons l'hypertube par un hyperplan Π suivant un domaine Σ et voyons comment on peut généraliser les trois propriétés rappelées ci-dessus. Nous nous souviendrons que l'hyperplan Π passant par un point d'univers donné M est entièrement déterminé par trois paramètres indépendants : par exemple on peut définir par trois coefficients de Lorentz $\beta_i = V_i/c$ la transformation de Lorentz pure qui fait passer du référentiel du laboratoire au référentiel $\Pi\Lambda$, ce qui revient à fixer l'axe des temps Λ et à laisser les axes d'espace indéterminés dans l'hyperplan Π .

1) On peut astreindre le « centre » de la masse fluide à être immobile dans l'hyperplan Π . Relativement au référentiel $\Pi\Lambda$, le rôle de « centre » sera joué par le pseudocentre de matière et nous savons que sa vitesse s'exprime dans l'hyperplan Π par $V_k = \frac{1}{J} \int_\Sigma j_k d\nu$ si bien que nous devons satisfaire aux trois équations $V_k = 0$.

Les V_k sont des fonctions compliquées de six paramètres : les trois β_i déterminant la position de l'axe Λ et trois paramètres (par exemple les angles d'Euler θ_i) déterminant les trois axes d'espace dans l'hyperplan Π , ces derniers pouvant rester indéterminés. Les trois équations peuvent alors nous permettre de déterminer les trois β_i , mais les expressions trouvées contiendront les θ_i , c'est-à-dire que, suivant les rotations d'espace que nous permettrons à notre référentiel, nous obtiendrons des systèmes $\Pi_0\Lambda_0$ différents. Nous ne pourrions pas en général par cette voie déterminer le référentiel $\Pi_0\Lambda_0$ de façon unique.

2) On peut astreindre le courant d'espace à être nul en moyenne. En général, on ne peut pas considérer directement un courant total car des expressions telles que $J_\mu = \int_\Sigma j_\mu d\nu$ ne sont pas tensorielles.

Mais on peut aussi exprimer la propriété en question, dans le cas d'une gouttelette infinitésimale en écrivant que l'élément d'hypersurface $d\sigma_\mu$ découpé par l'hypertube infinitésimal sur l'hyperplan Π est colinéaire au courant :

$$j_\mu d\sigma_\nu = j_\nu d\sigma_\mu$$

ce qui revient à dire que le tenseur $j_\mu d\sigma_\nu - j_\nu d\sigma_\mu$ est nul intrinsèquement.

Si nous considérons alors la goutte fluide macroscopique et sa coupe Σ par l'hyperplan Π , nous pouvons découper Σ en un grand nombre de petits éléments $d\sigma$ et pour chacun former le produit extérieur $j_\mu d\sigma_\nu - j_\nu d\sigma_\mu$.

Si on intègre, on obtient :

$$J_{[\mu\nu]} = \int_{\Sigma} (j_\mu d\sigma_\nu - j_\nu d\sigma_\mu)$$

qui est un tenseur pour un hyperplan Π donné. A chaque hyperplan Π correspond ainsi un tenseur $J_{[\mu\nu]}$ fonction des trois paramètres θ_i . Pour que l'hyperplan Π réponde à la même condition que pour la gouttelette infinitésimale, il faudrait que $J_{[\mu\nu]}$ soit nul intrinsèquement. Mais cela n'est pas possible en général car il faudrait remplir six conditions indépendantes alors que nous disposons seulement de trois paramètres. Il semble bien que, étant donné la variance de la densité de courant, il ne soit pas possible de définir un système analogue au référentiel propre de la gouttelette infinitésimale, en nous adressant uniquement aux propriétés cinématiques de la masse fluide.

3) Par contre, la troisième condition, qui fait intervenir les propriétés dynamiques du fluide, nous fournit immédiatement un référentiel. En effet, il existe, nous le savons, un vecteur G_μ , le vecteur impulsion, correspondant pour l'ensemble de la masse fluide au vecteur local densité d'impulsion. Si nous disposons l'axe des temps parallèlement à ce vecteur, l'hyperplan Π sera orthogonal à l'impulsion totale G_μ , comme le plan Π_0 de la gouttelette infinitésimale était orthogonal à la densité locale d'impulsion g_μ . Le référentiel particulier ainsi défini, nous le désignerons par $\Pi_I \Lambda_I$ et nous l'appellerons *référentiel d'inertie* (Weysenhoff).

Il est utile de donner les formules de transformation qui permettent de passer d'un référentiel quelconque $\Pi \Lambda$ (référentiel du laboratoire) au référentiel d'inertie $\Pi_I \Lambda_I$. Tout vecteur de composantes G_α dans le référentiel $\Pi \Lambda$ a dans le référentiel $\Pi_I \Lambda_I$ des composantes

$$G_I^\alpha = \lambda_{\nu\alpha} G_\nu$$

et réciproquement

$$G_\mu = l_{\mu\beta} G_I^\beta$$

avec

$$\lambda_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha}.$$

Les coefficients $\lambda_{\alpha\beta}$ sont donnés en fonction de la vitesse relative v_k du système Π_I par rapport au système Π par les formules connues ⁽³⁾

$$\lambda_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\alpha^2 v_i v_k}{(1 + \alpha)^2 c^2} \quad \lambda_{4i} = -\lambda_{i4} = \frac{\alpha v_i}{ic}$$

$$\lambda_{44} = \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Si le vecteur G_μ est le vecteur impulsion et si l'on astreint ses composantes d'espace à être nulles dans le système $\Pi_I \Lambda_I$ on a :

$$G_k^I = \lambda_{ki} G_i + \lambda_{k4} G_4 = 0.$$

Ou, en portant les valeurs de λ_{ki} , λ_{k4} :

$$\left[\delta_{ik} + \frac{\alpha^2 \nu_i \nu_k}{(1 + \alpha)^2 c^2} \right] G_i = \frac{\alpha \nu_k}{ic} G_4 \equiv \alpha \nu_k G_\otimes$$

Contractons par ν_k :

$$\nu_k \nu_k = \nu^2 \quad \text{et} \quad \alpha^2 \nu^2 = c^2 (\alpha^2 - 1)$$

$$\text{d'où} \quad \left(\nu_i + \frac{c^2 (\alpha^2 - 1)}{c^2 (\alpha + 1)} \nu_i \right) G_i \equiv \alpha \nu_i G_i = \alpha G_\otimes \nu_i.$$

Cette relation est vérifiée entre autres par la vitesse

$$\boxed{\nu_i = \frac{G_i}{G_\otimes}}$$

vitesse qui, reportée dans l'équation complète, la satisfait effectivement. En remplaçant ν_i dans les formules de transformation, on a :

$$\lambda_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\alpha^2 G_i G_k}{G_\otimes^2 c^2 (1 + \alpha)}$$

$$\lambda_{4i} = -\lambda_{i4} = \frac{\alpha G_i}{G_\otimes ic}, \quad \lambda_{44} = \alpha.$$

On peut encore remarquer que :

$$G_4 = ic G_\otimes = l_{4i} G^i + l_{44} G_4^I = \alpha G_4^I = \alpha ic M_0.$$

D'où :

$$G_\otimes = \alpha M_0$$

et finalement :

$$(II-8) \quad \boxed{\lambda_{ik} = \delta_{ik} + \frac{G_i G_k}{M_0 c^2 (M_0 + G_\otimes)}, \quad \lambda_{4i} = -\lambda_{i4} = \frac{G_i}{ic M_0}, \quad \lambda_{44} = \frac{G_\otimes}{M_0}}$$

§ 9. Centre de gravité. — Théorie de Möller.

Le référentiel $\Pi_I \Lambda_I$ une fois choisi, nous pouvons immédiatement y considérer deux points : son pseudocentre de masse et son pseudocentre de matière, que nous considérerons, d'après ce que nous avons dit plus haut, comme des points intrinsèques et dont nous obtiendrons les coordonnées dans un référentiel quelconque au moyen des formules de transformation de Lorentz. Le premier de ces points sera appelé *centre de gravité* (Möller). Nous désignerons par Z_μ ses composantes (covariantes).

Dans le référentiel $\Pi_I \Lambda_I$, ces composantes s'identifieront avec celles du pseudocentre de masse $Z_\mu^I = \xi_\mu^I$ et sa vitesse d'espace prendra ainsi l'expression particulière :

$$V_\mu = \frac{G_k^I}{G_\otimes^I}$$

c'est-à-dire qu'elle sera *nulle* puisque, l'hyperplan Π_I étant orthogonal au vecteur G_μ , les composantes d'espace de ce vecteur sont nulles. Le centre de gravité est ainsi déterminé comme étant le seul pseudocentre de masse qui soit *au repos* dans son référentiel de définition.

Pouvons-nous choisir le centre de gravité comme point C et lui attribuer le rôle de « centre » de la goutte? Cela revient à prendre le moment angulaire interne S_μ , relativement à ce point, à choisir son temps propre τ comme temps propre global de la goutte et à attribuer à la goutte prise en bloc la vitesse unitaire U_μ de ce point, vitesse unitaire qui est, répétons-le, orthogonale à Π_I , c'est-à-dire colinéaire à G_μ .

On aura dans le référentiel $\Pi_I \Lambda_I$:

$$\begin{aligned} G_k^I &= 0 & G_k^I &= \sqrt{G_\mu G_\mu} \\ U_k^I &= 0 & U_k^I &= ic \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$G_k^I = M_0 U_k^I \quad \text{et} \quad G_k^I = M_0 U_k^I.$$

D'où l'équation covariante $G_\mu = M_0 U_\mu$.

L'impulsion est colinéaire à la vitesse.

Les deux équations fondamentales donneront :

la première : $\dot{G}_\mu = 0$ d'où : $\dot{U}_\mu = 0$;

la seconde : $\dot{S}_{\mu\nu} = G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu = 0$.

La vitesse unitaire et le moment angulaire propre seront des constantes, en l'absence de forces extérieures.

Ainsi, si on résume la goutte fluide par un point matériel situé en son centre de gravité, ce point matériel aura un mouvement tout à fait classique et le modèle ne présentera pas grand intérêt. Au demeurant, comme nous l'avons souligné au début de ce chapitre, il ne saurait convenir pour représenter un corps animé d'une rotation, car ici aucun point autre que le centre de gravité n'intervient explicitement. L'édifice matériel se réduit à un point unique sans parties distinctes, et dès lors cela n'a guère de sens de lui attribuer une rotation propre, le moment angulaire n'a plus de signification physique.

Ce modèle a cependant servi à Möller ⁽¹²⁾ pour mettre en évidence des propriétés importantes du mouvement global de la goutte. Il est utile

de nous y arrêter un moment. La formule (7) appliquée au référentiel d'inertie nous montre que le moment angulaire de Möller (que nous désignerons par $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ pour ne pas le confondre avec celui que nous utiliserons par la suite) n'a pas de composantes de temps dans ce référentiel. Il se résume à un tenseur d'espace antisymétrique $\mathcal{G}_{[ij]}^I$ et peut aussi bien être représenté par son dual

$$\lambda_k^I = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mathcal{G}_{ij}^I$$

vecteur situé entièrement dans l'espace d'inertie d'où réciproquement :

$$\mathcal{G}_{ij}^I = \varepsilon_{ijk} \lambda_k^I.$$

Comme nous le verrons au chapitre suivant, cette relation, établie dans l'espace d'inertie entre le tenseur $\mathcal{G}_{ij}^I$ et le vecteur λ_k^I peut être transformée en une relation covariante entre le moment angulaire de Möller $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ et un vecteur d'univers λ_μ que nous nommerons le *spin de Möller*, dont les composantes sur les axes du système d'inertie sont λ_k^I et 0. On a alors :

$$\lambda_\mu = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{G_\nu \mathcal{G}_{\alpha\beta}}{M_0}$$

et réciproquement :

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{G_\alpha \lambda_\beta}{M_0}$$

comme on le vérifie aisément en projetant sur les axes du système d'inertie. L'expression de λ_μ montre d'ailleurs que ce vecteur reste *constant* au cours du mouvement en vertu des deux lois

$$\dot{G}_\mu = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{G}}_{\mu\nu} = 0.$$

Ceci dit, la formule (7) permet de situer le pseudo-centre de masse ξ_k relatif à un référentiel quelconque $\Pi\Lambda$ par rapport à la position Z_k du centre de gravité situé dans la même coupe d'espace Π . On a :

$$\mathcal{G}_{k4} = G_4 (\xi_k - Z_k).$$

D'autre part, en appliquant la transformation (8) aux composantes de $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ dans le système d'inertie, on obtient pour les composantes $\mathcal{G}_{k4}$ (en ne considérant bien entendu pour $\mathcal{G}_{\mu\nu}^I$ que les composantes d'espace)

$$\mathcal{G}_{k4} = l_{kp} l_{4q} \mathcal{G}_{pq}^I = \frac{G_p}{icM_0} \left[\delta_{kq} + \frac{G_k G_q}{M_0 c^2 (M_0 + G_\otimes)} \right] \mathcal{G}_{pq}^I.$$

Ou, en remplaçant $\mathcal{G}_{pq}^I$ par son expression

$$\mathcal{G}_{k4} = \frac{G_p}{icM_0} \left[\delta_{kq} + \frac{G_k G_q}{M_0 c^2 (M_0 + G_\otimes)} \right] \varepsilon_{pqr} \lambda_r^I.$$

Le second terme disparaît par antisymétrie :

$$g_{k4} = G_4(\xi_k - Z_k) = \varepsilon_{pkr} \frac{G_p}{icM_0} \lambda_r^I.$$

Si on désigne par $\vec{\alpha}$ le vecteur d'espace du système $\Pi\Lambda$ de composantes $\xi_k - Z_k$, on aura :

$$\alpha_k = \frac{1}{M_0 c^2} \varepsilon_{prk} \frac{G_p}{G_\otimes} \lambda_r^I.$$

Cette équation n'est pas vectorielle car les quantités λ_r^I désignent les composantes d'un vecteur dans l'espace d'inertie. Nous pouvons considérer le vecteur α_k comme un vecteur d'univers en introduisant la composante $\alpha_4 = 0$ dans le système $\Pi\Lambda$. Cherchons alors les composantes de ce vecteur d'univers dans le système d'inertie, en appliquant les relations (8) :

$$\alpha_4^I = \lambda_{4k} \alpha_k = \frac{G_k}{icM_0} \frac{\varepsilon_{prk}}{M_0 c^2} \frac{G_p}{G_\otimes} \lambda_r^I$$

α_4^I est nul par antisymétrie. Le vecteur d'univers α_μ est donc contenu dans l'espace du système d'inertie. Les deux centres considérés, pris simultanés dans le système $\Lambda\Pi$, sont donc également simultanés dans le système d'inertie.

On a de même

$$\alpha_j^I = \lambda_{jk} \alpha_k = \left[\delta_{jk} + \frac{G_j G_k}{M_0 c^2 (M_0 + G_\otimes)} \right] \frac{\varepsilon_{prk}}{M_0 c^2} \frac{G_p}{G_\otimes} \lambda_r^I.$$

On a encore un terme nul par antisymétrie et il reste

$$\alpha_j^I = \frac{\varepsilon_{prj}}{M_0 c^2} \frac{G_p}{G_\otimes} \lambda_r^I$$

Mais le vecteur $\frac{G_p}{G_\otimes}$ n'est autre que la vitesse V_p du système d'inertie par rapport au système $\Pi\Lambda$ et représentée sur les axes d'espace de ce dernier système. Sous réserve que les axes des deux systèmes soient parallèles et se déplacent sans rotation l'un par rapport à l'autre, les mêmes quantités V_p changées de signe représenteront les composantes dans le système d'inertie de la vitesse du système $\Pi\Lambda$. Elles représentent donc également un vecteur d'espace — V_p^I du système d'inertie. L'équation

$$\alpha_j^I = - \frac{\varepsilon_{prj}}{M_0 c^2} V_p^I \lambda_r^I$$

est dès lors une équation vectorielle de l'espace du système d'inertie :

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\lambda}}{M_0 c^2}.$$

On voit alors que, pour les différents référentiels (en déplacement parallèle) correspondant à toutes les vitesses $\mathbf{v}$ possibles (c'est-à-dire de module inférieur à c), les différents pseudocentres de masse simultanés d'un même centre de gravité vont se répartir sur un *disque* de l'espace d'inertie, perpendiculaire au spin de Möller (vecteur invariable), et dont le rayon est obtenu en donnant à $\mathbf{v}$ le module c , soit

$$|\alpha| \leq \frac{|\lambda|}{M_0 c}.$$

Ce disque est immobile puisque les pseudocentres de masse sont au repos dans le système d'inertie. La disposition particulière des pseudocentres relativement au spin se rattache au fait déjà signalé que c'est la rotation de la goutte sur elle-même qui produit la variation du pseudocentre de masse suivant le référentiel où on le définit.

§ 10. Centre de matière. Modèle de Bohm et Vigier.

On arrive à des résultats plus intéressants si on choisit comme centre de la masse fluide le second point remarquable, c'est-à-dire le pseudocentre de *matière* relatif au système d'inertie, que nous appellerons *centre de matière* proprement dit et dont nous désignerons les coordonnées (covariantes) par Y_μ . Dans le référentiel $\Pi_I \Lambda_I$, ces coordonnées seront égales à celles du pseudocentre de matière $Y_\mu^I = \eta_\mu^I$ et sa vitesse d'espace prendra les expressions particulières

$$V_k^I = \frac{1}{J} \int_{\Sigma_I} j_k^I d\nu.$$

Mais ces relations ne seront plus vraies dans un autre référentiel. C'est par rapport à ce centre de matière que nous évaluerons le moment angulaire interne $S_{\mu\nu}$. Son temps propre τ sera considéré comme le temps propre moyen de la goutte. Sa vitesse unitaire $U_\mu = \dot{Y}_\mu$ comme la vitesse unitaire moyenne de la goutte. On voit tout de suite que, $V_k^I = \frac{1}{J} \int_{\Sigma_I} j_k^I d\nu$ n'ayant aucune raison d'être nulle, le centre de matière ne sera pas au repos dans le référentiel d'inertie et la vitesse unitaire U_μ ne sera pas colinéaire à l'impulsion d'univers G_μ .

On aura ainsi $G_\mu U_\nu \neq G_\nu U_\mu$ et la relation

$$\dot{S}_{\mu\nu} = G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu \neq 0$$

nous fournira un moment angulaire interne qui variera avec le temps. On aboutira donc à des lois de mouvement différant profondément des lois classiques de la mécanique de Newton.

Pour préciser complètement les définitions sur lesquelles repose le modèle, il est utile de donner les formules qui expriment la vitesse et la position du centre de matière relativement à un référentiel quelconque (référentiel du laboratoire), que nous caractériserons par les valeurs G_i , G_4 que prennent dans ce référentiel les composantes de l'impulsion totale, ce qui permet, comme nous le savons, d'écrire les transformations de Lorentz qui font passer au référentiel d'inertie.

Dans le référentiel d'inertie, la vitesse du centre de matière est donnée, comme nous le savons, par :

$$V_k^I = \frac{1}{J} \int_{\Sigma^I} i_k^I d\nu.$$

Si on forme $V_k^I V_k^I$ et $\alpha = (1 - V_k^I V_k^I / c^2)^{-\frac{1}{2}}$ on peut écrire les composantes dans le système d'inertie de la vitesse unitaire U_μ :

$$U_k^I = \alpha V_k^I \quad U_4^I = \alpha ic.$$

De là on passe aux composantes dans le système du laboratoire par la transformation (8) :

$$U_k = \alpha \left(V_k^I + \frac{G_i G_k}{M_0 c^2 (M_0 + G_\otimes)} V_i^I \right)$$

$$U_4 = \alpha ic \left(\frac{G_\otimes}{M_0} + \frac{G_i V_i^I}{M_0 c^2} \right)$$

ou encore :

$$U_\otimes = \alpha \left(\frac{G_\otimes}{M_0} + \frac{G_i V_i^I}{M_0 c^2} \right).$$

Ces formules permettent alors de définir le système *propre* par la transformation de Lorentz $x_\mu^0 = L_{\mu\nu} x_\nu$ qui fait passer du système du laboratoire au système propre. On a les formules classiques :

$$L_{ik} = \delta_{ik} + \frac{U_i U_k}{(1 + U_\otimes) c^2} \quad L_{i4} = -L_{4i} = \frac{U_i}{c} \quad L_{44} = U_\otimes$$

dans lesquelles il suffit de remplacer U_k et $U_\otimes$ par leurs valeurs.

Enfin les coordonnées du centre de matière dans le système d'inertie sont :

$$Y_k^I(t^I) = \frac{1}{J} \int_{\Sigma^I} i_\otimes^I x_k^I d\nu \quad Y_4^I = ict^I.$$

Passons encore une fois au système du laboratoire :

$$Y_l(t^I) = Y_l^I(t^I) + \frac{G_l G_k}{M_0 c^2 (M_0 + G_{\otimes})} Y_k^I(t^I) + \frac{G_l}{M_0} t^I$$

$$Y_{\otimes}(t^I) = \frac{G_{\otimes}}{M_0} t^I + \frac{G_k}{M_0 c^2} Y_k^I(t^I).$$

Ces formules fournissent les équations paramétriques du mouvement du centre de matière en fonction du temps du système d'inertie. Il est plus convenable d'introduire comme paramètre le temps propre τ . On a $t^I = \alpha\tau$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_l &= Y_l^I(\alpha\tau) + \frac{G_l G_k}{M_0 c^2 (M_0 + G_{\otimes})} Y_k^I(\alpha\tau) + \frac{G_l}{M_0} \alpha\tau \\ Y_{\otimes} &= \frac{G_{\otimes}}{M_0} \alpha\tau + \frac{G_k}{M_0 c^2} Y_k^I(\alpha\tau) \end{aligned}}$$

Nous avons ainsi défini pour toute goutte fluide trois points intrinsèques particuliers :

1) Le point Z_μ ou centre de gravité, qui est au repos dans le système d'inertie, pour lequel il est pseudocentre de masse.

2) Le point Y_μ ou centre de matière, qui est pseudocentre de matière pour le système d'inertie et qui est au repos dans le système propre en raison de la définition de ce système.

3) Le point X_μ ou centre de masse, qui est pseudocentre de masse pour le système propre à l'instant considéré.

Ces trois points sont en général distincts, et comme nous l'avons vu, le vecteur d'univers joignant le centre de masse au centre de matière, vecteur que nous désignerons par Q_μ , est donné par :

$$Q_\mu = X_\mu - Y_\mu = -\frac{1}{\mathcal{M}_0 c^2} S_{\mu\nu} U_\nu.$$

On a évidemment $Q_\mu U_\mu = -\frac{1}{\mathcal{M}_0 c^2} S_{\mu\nu} U_\nu U_\mu = 0$ par antisymétrie, ce qui signifie que Q_μ est un vecteur d'espace du système propre, et traduit simplement le fait que nous avons supposé les deux points simultanés relativement au système propre.

On peut exprimer de façon analogue le quadrivecteur joignant le centre de gravité au centre de matière. Considérons l'expression de la composante de temps du moment angulaire propre dans le référentiel d'inertie :

$$S_{k\otimes}^I = \int_{\Sigma^I} [(x_k^I - Y_k^I) t_{\otimes\otimes}^I - (x_{\otimes}^I - Y_{\otimes}^I) t_{k\otimes}^I] d\nu$$

l'intégrale étant prise en maintenant constant le temps relatif au référentiel d'inertie $x_{\otimes}^I = \text{constant} = Y_{\otimes}^I$ ce qui annule le deuxième terme. Il reste

$$S_{k\otimes}^I = \int_{\Sigma_I} x_k^I t_{\otimes\otimes}^I d\nu - Y_k^I \int_{\Sigma_I} t_{\otimes\otimes}^I d\nu = G_{\otimes}^I \xi_k^I - Y_k^I G_{\otimes}^I$$

c'est-à-dire : $S_{k\otimes}^I = G_{\otimes}^I (\xi_k^I - Y_k^I)$.

Mais dans le système d'inertie, $G_{\otimes}^I$ est la norme M_0 du quadrivecteur G_{μ} , et d'autre part le pseudocentre de masse ξ_{μ}^I du système d'inertie coïncide avec le *centre de gravité* intrinsèque Z_{μ} , d'où

$$S_{k\otimes}^I = M_0 (Z_k^I - Y_k^I)$$

ou, si on remarque que $S_{i\otimes} = 0$ et $Z_i^I - Y_i^I = 0$, $S_{\mu\otimes}^I = M_0 (Z_{\mu}^I - Y_{\mu}^I)$.

Cette relation peut être rendue tensorielle en observant que le produit contracté $S_{\mu\nu} G_{\nu}$ qui est un quadrivecteur, a pour composantes dans le système d'inertie (où les composantes de G_{ν} sont 0, 0, 0 et icM_0) : $(S_{\nu}, G_{\nu})^I = S_{k4}^I icM_0$ et $(S_{i4}, G_{i4})^I = 0$.

On a donc : $(S_{\mu\nu} G_{\nu})^I = icM_0 S_{\mu 4}^I = -c^2 M_0^2 (Z_{\mu}^I - Y_{\mu}^I)$ relation qui est tensorielle et peut s'écrire dans n'importe quel référentiel :

$$S_{\mu\nu} G_{\nu} = -M_0^2 c^2 (Z_{\mu} - Y_{\mu})$$

Nous désignerons par $R_{\mu} = Y_{\mu} - Z_{\mu}$ le vecteur d'univers joignant le centre de gravité Z_{μ} au centre de matière Y_{μ} :

(II-9)

$$R_{\mu} = \frac{1}{M_0^2 c^2} S_{\mu\nu} G_{\nu}$$

On voit immédiatement que $R_{\mu} G_{\mu} = 0$:

R_{μ} est un vecteur d'espace du système d'inertie, ce qui est naturel puisque les deux points qu'il joint ont été définis comme simultanés dans ce système.

Les vecteurs Q_{μ} et R_{μ} sont ainsi en général différents de zéro. Mais on peut considérer les cas particuliers où ils sont nuls.

1) $R_{\mu} = 0$ centre de gravité et centre de matière sont confondus : $S_{\mu\nu} G_{\nu} = 0$.

C'est le cas déjà étudié : la goutte obéira à la même dynamique que la goutte de Möller :

$$\dot{U}_{\mu} = 0 \quad \dot{S}_{\mu\nu} = 0.$$

2) $Q_{\mu} = 0$ centre de masse et centre de matière sont confondus, ce

qui se traduit par la relation $S_{\mu\nu}U_\nu = 0$ où on reconnaît la « condition auxiliaire cinématique » de Frenkel-Weyssenhoff.

Ainsi on voit que le corpuscule de Frenkel (ou la goutte de Weyssenhoff) réalise un cas particulier du mouvement général d'une goutte fluide en rotation, celui où *le centre de matière et le centre de masse sont confondus*.

La goutte de Bohm-Vigier fournit donc bien la généralisation de la dynamique du corpuscule tournant relativiste qui était souhaitée au début du présent chapitre. En dotant le moment angulaire interne de composantes de temps dans le système propre — composantes qui expriment la séparation du centre de matière et du centre de masse — elle introduit de nouveaux paramètres dont on pourra disposer, non seulement pour représenter le corpuscule « classique » de Dirac, mais plus généralement pour constituer des fluides dotés de rotation interne susceptibles de propager les différentes ondes de la mécanique quantique.

En fait dans un travail récent ⁽⁵¹⁾ — que nous nous contentons de signaler — Vigier, Hillion et Lochak ont réussi à quantifier le mouvement général de la goutte en faisant apparaître un nombre déterminé d'états d'excitation stables pour lesquels le mouvement interne est périodique. Ils ont ainsi retrouvé la classification des particules élémentaires telles que la fournit l'expérience, et ce résultat, qui permet pour la première fois de rattacher les fonctions d'onde des diverses particules élémentaires à des états différents d'un même édifice matériel décrit concrètement, permet d'attribuer au modèle de la goutte une grande importance théorique.

CHAPITRE III

ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS DE MOUVEMENT

Dans le chapitre précédent, nous avons obtenu une expression globale du mouvement d'une goutte de fluide classique, expression que nous considérerons comme la base d'une nouvelle dynamique du corpuscule matériel. Cette dynamique, dont la dynamique classique du point matériel constitue une première approximation, introduit, pour représenter le corpuscule, plusieurs points distincts (trois, dans le cas général) et en cela, elle se montre capable de décrire sans contradiction des types de mouvement global où se reflète l'influence de mouvements internes de la matière du corpuscule. En choisissant comme « modèle » une goutte de fluide classique de préférence à une masse solide élastique, ou à tout autre type de corps, on particularise le mouvement, mais on a l'avantage de retrouver, comme cas particulier, des mouvements déjà étudiés et utilisés par divers auteurs. On va donc aboutir à une généralisation intéressante de ces travaux, en même temps qu'à une interprétation de leurs hypothèses de départ en termes d'hydrodynamique classique.

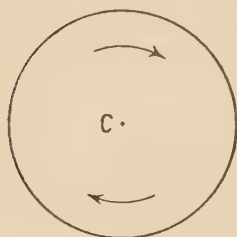
Dans le présent chapitre, nous allons développer la nouvelle dynamique du corpuscule dans le cas général et dans divers cas particuliers en nous bornant au cas du corpuscule libre en l'absence de forces extérieures. Nous allons commencer par étudier en détail le cas du corpuscule de Frenkel-Weyssenhoff, car il nous fournira des relations intéressantes que nous n'aurons pas de peine à généraliser.

§ 1. Mouvement de Weyssenhoff : signification.

Étant données les équations auxquelles nous avons abouti et qui représentent l'évolution de grandeurs globales caractérisant la goutte

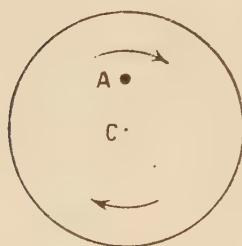
dans son ensemble, on peut se demander à quelle propriété du mouvement local en chaque point de la goutte correspond tel ou tel cas particulier. On peut ainsi proposer l'interprétation suivante pour le mouvement de Frenkel-Weyssenhoff étant donné que la condition $S_{\mu\nu}U_\nu = 0$ traduit le fait que le centre de matière et le centre de masse sont constamment confondus (14).

Considérons à titre d'exemple une sphère fluide homogène dont le centre C est immobile dans un référentiel propre Σ , le fluide tournant autour d'un axe passant par C, que nous prendrons perpendiculaire au plan de la figure.



Si la sphère tourne d'un bloc ou si la rotation se fait de façon laminaire par couches sphériques ou cylindriques de vitesses différentes, le point C, qui est centre de matière, sera aussi centre de masse par symétrie. Par ailleurs, l'impulsion totale relativement au système propre sera nulle, en l'absence de forces extérieures, et le

mouvement du point C sera un mouvement classique. Si la rotation du fluide est plus compliquée, si elle comporte en un point tel que A une



petite structure tourbillonnaire entraînée orbitalement avec une vitesse $\mathbf{v}$, les propriétés cinématiques globales ne seront pas modifiées, c'est-à-dire que C sera encore centre de matière et que la sphère sera encore au repos en moyenne dans le système Σ .

Par contre, au point de vue cinétique, le tourbillon A comportera une énergie supplémentaire $\mathcal{W}$ qui aura pour effets :

1) de déplacer vers le haut le centre de masse, qui dès lors se séparera du centre de matière;

2) de faire apparaître une impulsion supplémentaire $\frac{1}{c^2} \mathcal{W} \mathbf{v}$ qui fournira un résidu d'impulsion résultante dans le système propre et jouera ainsi le rôle de ce que nous appellerons « impulsion transversale ».

Le mouvement de Weyssenhoff correspondrait au cas où plusieurs tourbillons de cette espèce seraient disposés de façon à annuler le premier effet — si bien que centre de masse et centre de matière seraient confondus — sans annuler le second — si bien qu'on aurait une impulsion transversale différente de zéro. Il est visible en effet que ces deux conditions sont différentes. Considérons par exemple deux tourbillons

A_1 et A_2 d'énergie ω_1 et ω_2 situés sur un même diamètre de part et d'autre de C à des distances r_1 et r_2 de ce point.

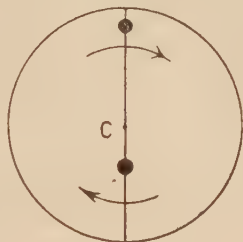
Le centre de masse et le centre de matière seront confondus à condition que $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$.

Cette relation traduit donc la condition de Weyssenhoff $S_{\mu\nu} U_\nu = 0$.

D'autre part, l'impulsion transversale sera

$$p = \frac{1}{c^2} (\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2).$$

Si la sphère tournait d'un bloc comme un corps solide (aux tourbillons près) avec une vitesse angulaire ω , la première condition $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ entraînerait $\omega_1 \omega r_1 = \omega_2 \omega r_2$ ou $\omega_1 v_1 = -\omega_2 v_2$ et p serait nulle. Mais il est naturel de supposer que, comme cela se passe ordinairement pour les masses fluides en rotation, la vitesse de rotation varie suivant la distance au centre, les couches successives tournant l'une dans l'autre.



On a $v_1 = r_1 \omega(r_1)$, $v_2 = r_2 \omega(r_2)$ et $p = \frac{1}{c^2} [\omega_1 r_1 \omega(r_1) - \omega_2 r_2 \omega(r_2)]$

p pourra alors être différent de zéro. Plus généralement, si on a n tourbillons, la condition de Weyssenhoff s'écrit : $\sum_i \omega_i r_i = 0$ et on aura une impulsion d'espace propre $p = \frac{1}{c^2} \sum_i \omega_i r_i \omega(r_i)$.

Il est bien évident que ces deux conditions ne pourraient demeurer réalisées constamment si les tourbillons étaient permanents et se déplaçaient avec le courant comme des bouchons sur l'eau. En effet, en reprenant l'exemple des deux tourbillons, nous voyons que leur vitesse angulaire orbitale doit être différente, pour que p ne soit pas nul. Mais alors ils se déplaceront l'un par rapport à l'autre comme les extrémités des deux aiguilles d'une montre, ils ne resteront pas sur un même diamètre et la compensation de Weyssenhoff ne pourra se maintenir. Il faudra donc supposer des conditions telles que les tourbillons se déplacent par rapport au courant, ou plus généralement, qu'il y ait de constants échanges d'énergie entre les tourbillons et les couches fluides en rotation quasi laminaire, les tourbillons pouvant s'évanouir ici et réapparaître là, de façon à maintenir constamment en coïncidence le centre de masse et le centre de matière.

Le mouvement de Weyssenhoff peut paraître paradoxal en ce que le centre de masse reste constamment confondu avec le centre de matière, car le centre de matière est immobile dans le système propre, tandis que

le centre de masse est en mouvement dans ce même système. En réalité, nous verrons, en traitant en détail le cas de Weyssenhoff, que le centre de matière possède, même en l'absence de forces extérieures, une certaine *accélération* proportionnelle à l'impulsion transversale. Il sera donc au repos dans le système propre Σ_0 , mais accéléré, si bien qu'un instant plus tard, il aura acquis une certaine vitesse par rapport au système Σ_0 , lequel aura par cela même cessé d'être le système propre puisque, étant un système galiléen, il ne peut pas être accéléré. Cette accélération du centre de matière, caractéristique de la dynamique non newtonienne du corpuscule de Weyssenhoff, permet ainsi au centre de masse, qui est en mouvement par rapport à tous les référentiels propres successifs, de se trouver constamment en coïncidence avec les centres de matière successifs qui sont chacun au repos dans le référentiel propre qui lui correspond.

C'est même ce paradoxe apparent qui fournit la clé de l'explication physique du mouvement de Weyssenhoff. L'existence d'une impulsion résiduelle dans le système propre, que nous avons expliquée sur l'exemple des tourbillons, impose au centre de masse d'être en mouvement dans le système propre. Mais ce mouvement lui-même ne fait que traduire une certaine déformation interne que va subir le fluide, déformation qui, étant donnée l'existence de tensions, va faire naître des forces internes antagonistes. Ce sont ces forces dont l'effet se traduira au total par une accélération imprimée au centre de matière. Cette accélération, qui obligera à chaque instant à changer de référentiel propre, n'a pas en général de relation simple avec le mouvement du centre de masse. Il y a un cas particulier où, au contraire, elle maintiendra le centre de matière constamment confondu avec le centre de masse. On se trouvera alors dans le cas spécial décrit par les équations de Weyssenhoff.

§ 2. Mouvement de Weyssenhoff: équations dynamiques.

Aux deux équations fondamentales

$$(III-1) \quad \dot{G}_\mu = 0$$

$$(III-2) \quad \dot{S}_{\mu\nu} = G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu$$

nous devons adjoindre les deux « relations auxiliaires » :

$$(III-3) \quad U_\mu U_\mu = -c^2$$

$$(III-4) \quad \text{d'où} \quad U_\mu \dot{U}_\mu = 0$$

$$(III-5) \quad \text{et} \quad U_\mu \ddot{U}_\mu = -\dot{U}_\mu \dot{U}_\mu$$

$$(III-6) \quad \text{et} \quad S_{\mu\nu} U_\nu = 0$$

$$(III-7) \quad \text{d'où} \quad S_{\mu\nu} \dot{U}_\nu = -\dot{S}_{\mu\nu} U_\nu.$$

On va utiliser trois quantités scalaires importantes :

1) La masse propre d'impulsion M_0 : — $M_0^2 c^2 = G_\mu G_\mu$.

Nous savons qu'elle est *constante*.

2) Le module du moment angulaire interne : $\Sigma_0^2 = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} S_{\mu\nu}$.

Ce module est également *constant*. En effet, on a :

$$\Sigma_0 \dot{\Sigma}_0 = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \dot{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} (G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu).$$

Les deux termes s'annulent séparément en vertu de la relation (6) et on a donc :

$$\dot{\Sigma}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_0 = \text{const.}$$

3) La masse propre d'inertie $\mathcal{M}_0$: — $\mathcal{M}_0 c^2 = G_\mu U_\mu$.

L'équation (2) contractée par U_ν devient :

$$\dot{S}_{\mu\nu} U_\nu = - G_\mu c^2 + \mathcal{M}_0 c^2 U_\mu$$

ce qui, en tenant compte de (7) fournit :

(III-8)

$$G_\mu = \mathcal{M}_0 U_\mu + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \dot{U}_\nu$$

qui est la première équation dynamique de Weyssenhoff (rappelons que le vecteur du premier membre est constant).

Contractons cette équation par $\dot{U}_\mu$:

$$G_\mu \dot{U}_\mu = \mathcal{M}_0 U_\mu \dot{U}_\mu + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \dot{U}_\mu \dot{U}_\nu.$$

Le premier terme du second membre est nul d'après (4). Le second terme est également nul en raison de l'antisymétrie de $S_{\mu\nu}$. Il reste donc :

(III-9)

$$G_\mu \dot{U}_\mu = 0$$

D'où il résulte immédiatement, en vertu de (1) que la dérivée de $G_\mu U_\mu$ — c'est-à-dire celle de $\mathcal{M}_0$ — est nulle. La masse propre d'inertie, comme la masse propre d'impulsion, est *constante* au cours du mouvement. Nous pouvons alors dériver l'équation (8) en tenant compte de (1) :

$$0 = \mathcal{M}_0 \dot{U}_\mu + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \ddot{U}_\nu + \frac{1}{c^2} \dot{S}_{\mu\nu} \dot{U}_\nu.$$

Le dernier terme est nul :

$$\dot{S}_{\mu\nu} \dot{U}_\nu = 0.$$

On le voit en explicitant $\dot{S}_{\mu\nu}$ et en tenant compte de (4) et de (9). Il reste donc :

(III-10)

$$\mathcal{N}_0 \dot{U}_\mu + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \ddot{U}_\nu = 0$$

C'est la deuxième équation dynamique, ou équation de Mathisson ⁽³⁸⁾. Contractons-la par $\ddot{U}_\mu$:

$$\mathcal{N}_0 \dot{U}_\mu \ddot{U}_\mu + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \ddot{U}_\mu \ddot{U}_\nu = 0.$$

Le deuxième terme est nul, par suite de l'antisymétrie de $S_{\mu\nu}$. Il en résulte que :

$$\dot{U}_\mu \ddot{U}_\mu = 0$$

et, par suite, que le carré scalaire $\dot{U}_\mu \dot{U}_\mu$ est *constant*. Nous faisons ainsi apparaître un quatrième scalaire, le *module de l'accélération d'univers* $\gamma_0 = \sqrt{\dot{U}_\mu \dot{U}_\mu}$ qui est constant.

Il est important de remarquer que l'équation (10) est du second ordre par rapport à la vitesse unitaire du centre de matière (ou du troisième ordre par rapport à ses coordonnées). Après intégration, il restera donc à choisir un double système de constantes arbitraires. On pourra ainsi se donner, non seulement la vitesse initiale, mais aussi l'accélération initiale, qui sera donc différente de zéro en général, bien qu'il n'y ait aucune force extérieure. On voit qu'on se trouve en présence d'une dynamique profondément différente de la dynamique newtonienne.

§ 3. Mouvement de Weyssenhoff : spin.

Weyssenhoff, après Frenkel, décompose le moment angulaire interne de la façon suivante : dans chaque référentiel, il considère les composantes purement spatiales $S_{12} S_{23} S_{31}$ qui constituent un tenseur d'espace antisymétrique, et il prend le dual de ce tenseur, qui est un vecteur d'espace : $s_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} S_{ij}$.

D'autre part il forme un autre vecteur avec les composantes de temps de $S_{\mu\nu}$: $t_k = iS_{4k}$.

La relation (6) traduit l'hypothèse que, dans le référentiel propre, le vecteur t_k est nul. M. Louis de Broglie a fait remarquer ⁽¹⁾ que, *dans le système propre*, le vecteur s_k de Weyssenhoff représente convenablement le spin, mais qu'il n'en est plus de même dans un autre système car la décomposition considérée n'est pas covariante. Considérons alors

le vecteur d'espace $\sigma_k^0 = (s_k)^0$ de Weyssenhoff relatif à la décomposition particulière au *système propre* (vecteur qui, dans le système propre, exprime toutes les composantes non nulles de $S_{\mu\nu}$) et considérons-le comme un vecteur d'*univers* dont la composante de temps dans le système propre est nulle : $\sigma_4^0 = 0$.

Il est alors possible d'exprimer de façon covariante la relation entre ce vecteur σ_μ , qui représentera le *spin*, et le moment angulaire interne $S_{\mu\nu}$ (18). On a dans le système propre :

$$(III-11) \quad \sigma_k^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} S_{ij}^0.$$

Établissons une correspondance entre les permutations des axes dans l'espace et dans l'univers en posant par convention :

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk4}$$

d'où : $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{4ijk}$.

Multiplions et divisons le second membre de (11) par ic , qui est la quatrième composante — et la seule composante non nulle — de la vitesse unitaire dans le système propre. On a ainsi :

$$\sigma_k^0 = \frac{1}{2ic} \varepsilon_{ijk4} (S_{ij} U_4)^0.$$

Mais cette relation peut aussi s'écrire :

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2ic} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (S_{\mu\nu} U_\beta)^0$$

car les termes où $\beta \neq 4$ sont tous nuls, et d'autre part, la quatrième projection donne bien $\sigma_4^0 = 0$.

Sous cette forme, la relation est covariante, et donc, valable dans tous les systèmes. On peut ainsi *définir* le spin comme un dual d'univers en posant :

$$(III-12) \quad \boxed{\sigma_\alpha = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha} U_\beta S_{\mu\nu}}$$

On aura alors $\sigma_\alpha U_\alpha = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha} U_\beta U_\alpha S_{\mu\nu} = 0$ par antisymétrie.

La relation (12) entraîne donc nécessairement la « relation auxiliaire »

$$(III-13) \quad \sigma_\alpha U_\alpha = 0$$

que Costa de Beauregard a introduite dans sa thèse à titre de postulat.

Si nous multiplions les deux membres de (12) par U_λ et que nous prenons les duals, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma\rho} \sigma_\alpha U_\lambda &= -\frac{1}{4c} \varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha} \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma\rho} U_\lambda U_\beta S_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4c} \delta_{\lambda\gamma\rho}^{\beta\mu\nu} U_\lambda U_\beta S_{\mu\nu} \end{aligned}$$

où le symbole de Kronecker généralisé $\delta_{\lambda\gamma\rho}^{\beta\mu\nu}$ représente la somme des produits $\delta_\lambda^\beta \delta_\gamma^\mu \delta_\rho^\nu$ où on permute de toutes les façons possibles les indices inférieurs, en mettant le signe — pour les permutations impaires (19). Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma\rho} \sigma_\alpha U_\lambda &= \frac{1}{4c} [U_\lambda S_{\gamma\rho} U_\lambda + U_\gamma S_{\rho\lambda} U_\lambda + U_\rho S_{\lambda\gamma} U_\lambda \\ &\quad - U_\lambda S_{\rho\gamma} U_\lambda - U_\rho S_{\gamma\lambda} U_\lambda - U_\gamma S_{\lambda\rho} U_\lambda] \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (3) et de (6)

$$\frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma\rho} \sigma_\alpha U_\lambda = -\frac{2c^2}{4c} S_{\gamma\rho}$$

ou enfin

(III-14)

$$S_{\gamma\rho} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\gamma\rho\lambda\alpha} U_\lambda \sigma_\alpha$$

Ainsi, dans un champ de vitesse U_μ donné, on établit une correspondance bi-univoque entre les tenseurs antisymétriques moment angulaire interne, orthogonaux au courant, et les vecteurs spin également orthogonaux au courant. Pour exprimer toutes les composantes du moment angulaire interne, il n'est donc besoin que d'un seul vecteur spin, mais c'est un vecteur *d'univers*. Le vecteur t_k de Weyssenhoff est, dans cette nouvelle formulation, nul intrinsèquement, et non plus seulement dans le système propre. Ajoutons qu'il réapparaîtra, sous forme d'un vecteur d'univers covariant, lorsque nous passerons à l'étude du cas général où le centre de masse n'est plus confondu avec le centre de matière et où $S_{\mu\nu} U_\nu \neq 0$.

Il est facile de voir que le module du spin est le même que celui du moment angulaire. Remplaçons, dans l'expression de $\Sigma_0^2 = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} S_{\mu\nu}$ par son expression tirée de (14) :

$$\Sigma_0^2 = -\frac{1}{2c^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} U_\lambda \sigma_\rho = -\frac{1}{2c^2} 2 \delta_{\lambda\rho}^{\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta U_\lambda \sigma_\rho$$

où le symbole de Kronecker généralisé $\delta_{\lambda\rho}^{\alpha\beta}$ vaut simplement $\delta_\lambda^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\rho^\alpha \delta_\lambda^\beta$.

D'où : $\Sigma_0^2 = -\frac{1}{c^2} (U_\alpha \sigma_\beta U_\alpha \sigma_\beta - U_\alpha \sigma_\beta U_\beta \sigma_\alpha)$ ou, en tenant compte de (4)

et de (13) $\Sigma_0^2 = \frac{1}{c^2} c^2 \sigma_\beta \sigma_\beta = \sigma_0^2$ en appelant σ_0 le module du spin.

On peut généraliser ce calcul et obtenir ainsi une égalité très utile : formons le produit semi-contracté :

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} S_{\mu\lambda} &= -\frac{1}{c^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_{\mu\lambda\gamma\varrho} U_\gamma \sigma_\varrho \\ &= -\frac{1}{c^2} \delta_{\lambda\gamma\varrho}^{\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta U_\gamma \sigma_\varrho \\ &= -\frac{1}{c^2} [\delta_{\nu\lambda} U_\alpha \sigma_\beta U_\alpha \sigma_\beta + U_\alpha \sigma_\lambda U_\nu \sigma_\alpha + U_\lambda \sigma_\beta U_\beta \sigma_\nu \\ &\quad - \delta_{\nu\lambda} U_\alpha \sigma_\beta U_\beta \sigma_\alpha - U_\lambda \sigma_\beta U_\beta \sigma_\nu - U_\alpha \sigma_\lambda U_\alpha \sigma_\nu] \end{aligned}$$

soit, en tenant compte de (4) et de (13) :

$$(III-15) \quad S_{\mu\nu} S_{\mu\lambda} = \sigma_0^2 \left(\delta_{\nu\lambda} + \frac{U_\nu U_\lambda}{c^2} \right) - \sigma_\nu \sigma_\lambda = \sigma_0^2 \eta_{\nu\lambda} - \sigma_\nu \sigma_\lambda$$

On peut faire un calcul analogue en introduisant le dual du moment angulaire :

$$\widehat{S}_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = \frac{1}{c} (\sigma_\mu U_\nu - \sigma_\nu U_\mu).$$

Il vient : $\widehat{S}_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\lambda} = \sigma_0^2 \frac{U_\nu U_\lambda}{c^2} - \sigma_\nu \sigma_\lambda$, formule qui fournit en particulier : $\frac{1}{2} \widehat{S}_{\mu\nu} \cdot \widehat{S}_{\mu\nu} = -\sigma_0^2$ (on sait que $\delta_{\nu\nu} = 4$).

Et de même : $S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\lambda} = 0$.

Enfin on peut contracter $S_{\mu\nu}$ et $\widehat{S}_{\mu\nu}$ par σ_ν , $S_{\mu\nu} \sigma_\nu = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta \sigma_\nu = 0$ par antisymétrie

$$\widehat{S}_{\mu\nu} \sigma_\nu = \frac{1}{c} (\sigma_\mu U_\nu - \sigma_\nu U_\mu) \sigma_\nu = -\frac{\sigma_0^2}{c} U_\mu.$$

§ 4. Mouvement de Weyssenhoff : impulsion transversale.

Nous allons faire intervenir le spin dans l'expression des deux lois dynamiques. La première loi :

$$G_\mu = \mathfrak{M}_0 U_\mu + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \dot{U}_\nu$$

décompose l'impulsion en un vecteur colinéaire au courant (et ayant la forme d'une impulsion classique) et un vecteur $\frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \dot{U}_\nu$, qui est orthogonal au courant, puisque $S_{\mu\nu} U_\mu = 0$.

Il est utile de mettre en évidence ce dernier vecteur qui représente l'impulsion non-classique, ou *impulsion transversale*. Nous poserons

$$(III-16) \quad P_\mu = -\frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \dot{U}_\nu$$

$$(III-17) \quad \text{avec} \quad G_\mu = \mathfrak{M}_0 U_\mu - P_\mu$$

$$(III-18) \quad \text{et} \quad P_\mu U_\mu = 0.$$

En remplaçant $S_{\mu\nu}$ en fonction du spin, il vient :

$$(III-19) \quad P_\mu = \frac{i}{c^3} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\nu \dot{U}_\alpha \sigma_\beta.$$

D'où il résulte immédiatement par antisymétrie que :

$$(III-20) \quad P_\mu \sigma_\mu = 0$$

$$(III-21) \quad \text{et} \quad P_\mu \dot{U}_\mu = 0.$$

Si on exprime cette relation dans le système propre, on a :

$$P_k^0 = \frac{i}{c^3} \varepsilon_{k4ij} i c \gamma_i^0 \sigma_j^0 = \frac{i}{c^2} \varepsilon_{ijk} \sigma_i^0 \gamma_j^0$$

ce qu'on peut écrire en notations vectorielles :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c^2} \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\gamma}.$$

L'impulsion transversale est, dans le système propre, représentée par le produit vectoriel du spin par l'accélération.

D'autre part la deuxième loi dynamique

$$\mathfrak{M}_0 \dot{U}_\mu + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \ddot{U}_\nu = 0$$

donne $\mathfrak{M}_0 \dot{U}_\mu + \frac{i}{c^3} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta \ddot{U}_\nu = 0.$

Si on contracte par σ_μ , le deuxième terme s'annule par antisymétrie, et il reste :

$$(III-22) \quad \boxed{\dot{U}_\mu \sigma_\mu = 0.}$$

Cette relation complète les relations (4), (13), (18), (20), (21) et montre que les quatre vecteurs d'univers, U_μ , $\dot{U}_\mu$, P_μ et σ_μ sont orthogonaux deux à deux. Ils forment le long d'une ligne d'univers parcourue par le centre de matière un système de quatre axes orthogonaux généralisant les axes mobiles de Darboux-Frenet. Ou encore, si on se place dans le sys-

tème propre, les trois vecteurs $\dot{U}_\mu P_\mu$ et σ_μ , qui sont dans l'espace propre, y forment un trièdre trirectangle.

Étant donnée cette disposition, on peut former entre ces quatre vecteurs trois relations analogues à (19) fournissant les expressions de U_μ , $\dot{U}_\mu$ et σ_μ , et également des relations entre bivecteurs. Par exemple, multiplions les deux membres de (19) par U_λ et prenons les duals :

$$\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\lambda\gamma\varphi} P_\mu U_\lambda = -\frac{1}{2c^3} \varepsilon_{\mu\lambda\gamma\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\nu \dot{U}_\alpha \sigma_\beta U_\lambda = -\frac{1}{2c^3} \delta_{\alpha\beta}^{\lambda\gamma} U_\nu U_\alpha \sigma_\beta U_\lambda$$

ce qui fournit, en tenant compte des relations d'orthogonalité :

$$\frac{i}{2} \varepsilon_{\gamma\varphi\alpha\beta} P_\alpha U_\beta = \frac{1}{2c} (\dot{U}_\gamma \sigma_\varphi - \dot{U}_\varphi \sigma_\gamma)$$

Il existe naturellement une relation entre les modules des quatre vecteurs considérés, modules qui sont constants tous les quatre. Remarquons en effet, que la relation (17), dont les trois vecteurs forment un triangle rectangle, fournit par conséquent :

$$G_\mu G_\mu = \mathcal{M}_0^2 U_\mu U_\mu + P_\mu P_\mu.$$

Ou, si on pose $P_\mu P_\mu = \mathcal{P}_0^2 c^2$ (si bien que $\mathcal{P}_0$ joue le rôle d'une masse qui exprime une énergie non-classique dans le système propre), on a :

$$(III-23) \quad \mathcal{P}_0^2 = \mathcal{M}_0^2 - M_0^2 = \text{const.}$$

Formons alors le carré scalaire de P_μ exprimé en fonction de $S_{\mu\nu}$:

$$P_\mu P_\mu = \mathcal{P}_0^2 c^2 = \frac{1}{c^4} S_{\mu\nu} S_{\mu\lambda} \dot{U}_\nu \dot{U}_\lambda$$

ou, d'après (15) : $\mathcal{P}_0^2 c^2 = \frac{1}{c^4} [\sigma_0^2 \eta_{\lambda\nu} - \sigma_\lambda \sigma_\nu] \dot{U}_\lambda \dot{U}_\nu = \frac{\sigma_0^2 \dot{U}_\nu \dot{U}_\nu}{c^4} = \frac{\sigma_0^2 \gamma_0^2}{c^4}$ en tenant compte de (4) et de (22).

Ainsi la relation cherchée entre les quatre invariants est :

$$(III-24) \quad \boxed{\sigma_0 \gamma_0 = \mathcal{P}_0 c^3}$$

Formons enfin la dérivée du spin sous sa forme (12) :

$$\dot{\sigma}_\mu = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\mu} (\dot{U}_\nu S_{\alpha\beta} + U_\nu \dot{S}_{\alpha\beta}).$$

Si dans le deuxième terme, on remplace $\dot{S}_{\alpha\beta}$ par son expression (2), on

voit que ce terme s'annule par antisymétrie. Remplaçons dans le premier terme $S_{\alpha\beta}$ par (14). Il vient :

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_\mu &= \frac{i}{2c} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\mu} \dot{U}_\nu \frac{i}{c} \varepsilon_{\alpha\gamma\eta\theta} U_\gamma \sigma_\theta \\ &= \frac{1}{c^2} \delta_{\gamma\eta}^{\mu\alpha} \dot{U}_\nu U_\gamma \sigma_\theta \\ &= \frac{1}{c^2} (\dot{U}_\nu U_\mu \sigma_\nu - \dot{U}_\nu U_\nu \sigma_\mu).\end{aligned}$$

Les deux termes s'annulent en vertu de (22) et (4).

Il reste donc :

$$\boxed{\dot{\sigma}_\mu = 0}$$

Le spin fournit donc, outre l'impulsion, un second vecteur d'univers *constant*. Cette importante propriété résulte du reste directement du fait que le spin, vecteur d'espace propre, est perpendiculaire à l'accélération. En effet, si nous prenons comme référentiel le système propre Σ_0 à un instant donné et que nous considérons dans ce système le centre de matière au bout d'un temps Δt , ce point, qui est accéléré, aura pris une certaine vitesse *dans la direction du vecteur accélération* et la transformation de Lorentz n'entraînera aucune variation du vecteur σ_k puisque celui-ci sera perpendiculaire à cette vitesse.

§ 5. Mouvement de Weyssenhoff : intégration.

Nous pouvons maintenant transformer l'expression de la deuxième loi dynamique de façon à la rendre facilement intégrable. Contractons (10) par $S_{\mu\lambda}$:

$$-\mathcal{M}_0 \dot{U}_\mu S_{\lambda\mu} + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} S_{\mu\lambda} \ddot{U}_\nu = 0$$

ou, d'après (16) et (15) :

$$\mathcal{M}_0 c^2 P_\lambda + \frac{1}{c^2} \left[\sigma_0^2 \left(\ddot{U}_\lambda + U_\lambda \frac{U_\nu \ddot{U}_\nu}{c^2} \right) - \sigma_\lambda \sigma_\nu \ddot{U}_\nu \right] = 0.$$

En remarquant que si on dérive $\sigma_\nu \ddot{U}_\nu = 0$ il vient :

$$\sigma_\nu \ddot{U}_\nu + \dot{\sigma}_\nu \dot{U}_\nu = 0$$

ou, puisque $\dot{\sigma}_\nu = 0$: $\sigma_\nu \ddot{U}_\nu = 0$ on voit que le dernier terme s'annule, et, en tenant compte de (5) il vient :

$$\mathcal{M}_0 c^2 P_\lambda + \frac{1}{c^2} \sigma_0^2 \left(\ddot{U}_\lambda - U_\lambda \frac{\dot{U}_0^2}{c^2} \right) = 0$$

ou, d'après (24) : $\sigma_0^2 \ddot{U}_\lambda - c^4 (\mathcal{P}_0^2 U_\lambda - \mathcal{M}_0 P_\lambda) = 0.$

On facilite l'intégration en introduisant le vecteur constant G_μ au moyen de (17) et (23) :

$$\sigma_0^2 \ddot{U}_\lambda + c^4 (M_0^2 U_\lambda - \mathcal{N}_0 G_\lambda) = 0$$

L'équation s'intègre simplement en prenant pour variable

$$M_0^2 U_\lambda - \mathcal{N}_0 G_\lambda$$

On obtient une fonction sinusoïdale dont la pulsation Ω (en fonction du temps *propre*) est : $\Omega = \frac{M_0 c^2}{\sigma_0}$ et l'intégrale première cherchée est :

$$M_0^2 U_\lambda = \mathcal{N}_0 G_\lambda + A_\lambda e^{-i(\Omega\tau + \varphi_\lambda)} \quad (\text{sans sommation sur } \lambda).$$

Les A_λ et φ_λ sont des constantes.

Pour achever l'intégration, on a avantage à former le rayon vecteur R_μ qui joint le centre de matière au *centre de gravité*, immobile dans le système d'inertie. On a d'après (II-9)

$$(III-25) \quad M_0^2 c^2 R_\mu = S_{\mu\nu} G_\nu.$$

On sait que $R_\mu G_\mu = 0$.

D'autre part $M_0^2 c^2 R_\mu U_\mu = S_{\mu\nu} G_\nu U_\mu = 0$ d'après (6).

Ainsi le vecteur d'univers R_μ est à la fois dans l'espace propre et dans l'espace d'inertie. Autrement dit, les deux positions du centre de matière et du centre de gravité, qui sont simultanées dans le système propre, sont aussi simultanées dans le système d'inertie.

Orthogonal à G_μ et U_μ , le rayon vecteur l'est par conséquent à l'impulsion transversale P_μ . Enfin on a d'après (14)

$$M_0^2 c^2 R_\mu \sigma_\mu = \frac{i}{c} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta G_\nu \sigma_\mu = 0 \quad \text{par antisymétrie.}$$

Le rayon vecteur est donc orthogonal à U_μ , P_μ , σ_μ . Il est donc colinéaire au quatrième des axes de notre système de Frenet, c'est-à-dire à $\dot{U}_\mu$. Cela se constate du reste immédiatement en portant (8) dans (25) :

$$M_0^2 c^2 R_\mu = S_{\mu\nu} \left(\mathcal{N}_0 U_\nu + \frac{1}{c^2} S_{\gamma\lambda} \dot{U}_\lambda \right) = -\frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} S_{\gamma\lambda} \dot{U}_\lambda$$

ou, d'après (15), et en tenant compte de (4) et de (22) :

$$(III-26) \quad M_0^2 c^4 R_\mu = -\sigma_0^2 \dot{U}_\mu.$$

Il en résulte en particulier que, comme l'accélération, le rayon vecteur possède un module constant $\mathcal{R}_0$:

$$\mathcal{R}_0^2 = R_\mu R_\mu = \frac{\sigma_0^4 \mathcal{E}_0^2}{M_0^4 c^8} = \frac{\sigma_0^2 \mathcal{E}_0^2 c^6}{M_0^4 c^8} \quad \text{d'après (24)}.$$

On a donc finalement :

$$\boxed{\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma_0 \mathcal{E}_0}{M_0^2 c}}$$

Si nous dérivons l'expression de R_μ , il vient :

$$\begin{aligned} M_0^2 c^2 \dot{R}_\mu &= \dot{S}_{\mu\nu} G_\nu = (G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu) G_\nu \\ &= -\mathcal{M}_0 c^2 G_\mu + M_0^2 c^2 U_\mu \end{aligned}$$

soit

(III-27)

$$\boxed{\dot{R}_\mu = U_\mu - \frac{\mathcal{M}_0}{M_0^2} G_\mu}$$

Il est facile d'interpréter et de vérifier cette relation en la projetant sur le système d'inertie. On obtient en effet

(III-28)

$$\dot{R}_k^I = U_k^I$$

puisque les composantes d'espaces de G_μ sont nulles. Si alors nous considérons la vitesse ν_k (de module ν_0) du centre de matière dans le système d'inertie, qui est aussi la vitesse du système propre par rapport au système d'inertie, et si on pose : $\alpha = (1 - \nu_0^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ alors on a :

$$U_k^I = \alpha \nu_k \quad \text{et} \quad \dot{R}_k^I = \frac{d}{d\tau} R_k^I = \alpha \frac{d}{dt^I} R_k^I$$

(t^I étant le temps du système d'inertie) et la relation (28) s'écrit : $\frac{d}{dt^I} R_k^I = \nu_k$

ce qui est évident puisque l'origine de R_k^I est au repos dans le système d'inertie.

Par ailleurs, toujours dans le système d'inertie, on voit que R_k^I est orthogonal au vecteur d'espace constant σ_k^I et que sa longueur $\mathcal{R}_0$ est constante. Le centre de matière décrit donc un mouvement circulaire autour du centre de gravité dans un plan orthogonal au spin. Comme nous avons vu que la vitesse unitaire est une fonction sinusoïdale du temps, le mouvement circulaire est uniforme et la pulsation Ω que nous avons calculée représente la vitesse angulaire *en fonction du temps propre*. On le vérifie du reste immédiatement en dérivant (28) et en portant l'expression obtenue pour $\dot{U}_k^I$ dans l'équation (26) projetée sur les axes d'espace du système d'inertie.

Il vient alors :

$$(III-29) \quad M_0^2 c^4 R_k^I = -\sigma_0^2 \dot{R}_k^I$$

équation qui s'intègre immédiatement et fournit encore une pulsation $\Omega = \frac{M_0 c^2}{\sigma_0}$.

Mais il faut encore exprimer et intégrer l'équation (29) en fonction du temps t^I du référentiel d'inertie. Pour cela, il faut calculer le coefficient de Lorentz $\alpha = (1 - \nu_0^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

On y arrive facilement en contractant (27) par U_μ :

$$\dot{R}_\mu U_\mu = -c^2 + \frac{\mathcal{M}_0^2}{M_0^2} c^2 = \frac{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2}{M_0^2} c^2.$$

Exprimons alors le premier membre dans le système d'inertie où

$$U_k^I = \alpha \nu_k, \quad \dot{R}_k^I = \alpha \nu_k$$

et où, en outre, on a pour la quatrième composante :

$$\dot{R}_4^I = \alpha ic - \frac{\mathcal{M}_0}{M_0^2} G_4^I = ic \left(\alpha - \frac{\mathcal{M}_0}{M_0} \right).$$

Il vient

$$c^2 \frac{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2}{M_0^2} = \alpha^2 \nu_0^2 + \alpha ic \cdot ic \left(\alpha - \frac{\mathcal{M}_0}{M_0} \right)$$

soit

$$\frac{\mathcal{M}_0^2}{M_0^2} - 1 = \alpha^2 \left(\frac{\nu_0^2}{c^2} - 1 \right) + \alpha \frac{\mathcal{M}_0}{M_0}$$

ou, comme

$$\alpha^2 \left(\frac{\nu_0^2}{c^2} - 1 \right) = -1$$

$$\frac{\mathcal{M}_0^2}{M_0^2} = \alpha \frac{\mathcal{M}_0}{M_0}$$

soit enfin

(III-30)

$$\alpha = \frac{\mathcal{M}_0}{M_0}$$

Portons alors ce résultat dans l'équation (29) :

$$M_0^2 c^4 R_k^I = -\sigma_0^2 \frac{d^2}{d(t^I)^2} R_k^I \alpha^2 = -\sigma_0^2 \frac{\mathcal{M}_0^2}{M_0^2} \frac{d^2}{d(t^I)^2} R_k^I$$

ce qui, après intégration, fournit une vitesse angulaire en fonction du temps t^I :

(III-31)

$$\omega^I = \frac{M_0^2 c^2}{\sigma_0 \mathcal{M}_0}$$

Ce résultat avait déjà été donné par Weyssenhoff ⁽²⁾, mais les bases axiomatiques de sa théorie ne permettaient pas de préciser quel point était fixe et quel point tournait.

Nous pouvons cependant donner la forme qu'il trouve pour l'expression de la vitesse dans le système d'inertie car elle se déduit immédiatement de notre formule (19). La relation $G_\mu = \mathcal{M}_0 U_\mu - P_\mu$ projetée sur les axes d'espace du système d'inertie donne :

$$G_k = 0 = \mathcal{M}_0 U_k - P_k^I \\ P_k^I = \mathcal{M}_0 U_k^I = \mathcal{M}_0 \alpha \nu_k.$$

D'où : $\mathcal{M}_0 \alpha \nu_k = \frac{i}{c^3} \varepsilon_{k4ij} \alpha i c \cdot \alpha^2 \Gamma_i \sigma_j^I$ en appelant Γ_i l'accélération classique dans le système d'inertie ($\dot{U}_k^I = \alpha^2 \Gamma_k$).

$$\mathcal{M}_0 \nu_k = \frac{\alpha^2}{c^2} \varepsilon_{ijk} \sigma_i^I \Gamma_j = \frac{\mathcal{M}_0^2}{M_0^2 c^2} \varepsilon_{ijk} \sigma_i^I \Gamma_j$$

d'après (30).

D'où :

$$\nu_k = \frac{\mathcal{M}_0}{M_0^2 c^2} \varepsilon_{ijk} \sigma_i^I \Gamma_j$$

ce qu'on peut écrire simplement :

(III-32)

$$\mathbf{v} = \frac{\mathcal{M}_0}{M_0^2 c^2} \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\Gamma}$$

La signification cinématique de cette relation apparaît immédiatement si on se souvient que, d'après (27) et (29) on a :

$$\dot{U}_k^I = \alpha^2 \Gamma_k = \ddot{R}_k = - \frac{M_0^2 c^4}{\sigma_0^2} R_k^I.$$

On peut ainsi remplacer l'accélération $\boldsymbol{\Gamma}$ par

$$- \frac{1}{\alpha^2} \frac{M_0^2 c^4}{\sigma_0^2} \mathbf{R} = - \frac{M_0^2 c^4}{\mathcal{M}_0^2 \sigma_0^2} \mathbf{R}.$$

La relation (32) devient alors :

$$\mathbf{v} = \frac{M_0^2 c^2}{\mathcal{M}_0 \sigma_0^2} \mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}$$

ce qui est l'expression classique d'un mouvement circulaire uniforme en fonction d'un vecteur vitesse angulaire

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{M_0^2 c^2}{\mathcal{M}_0 \sigma_0^2} \boldsymbol{\sigma}$$

soit

(III-32')

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Le vecteur ω est constant puisque $\dot{\omega}_k^I = 0$. Il a bien pour module la quantité (31).

§ 6. Balourd et giration.

Nous allons maintenant étudier le cas général où le moment angulaire possède des composantes de temps non nulles dans le système propre (goutte de Bohm et Vigier) (58, 60). Nous suivrons le même plan que pour l'étude de la goutte de Weyssenhoff. On a les deux équations :

$$\begin{aligned} \dot{G}_\mu &= 0 \\ \text{(III-2)} \quad \dot{S}_{\mu\nu} &= G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu \end{aligned}$$

avec les deux conditions auxiliaires :

$$\text{(III-3)} \quad U_\mu U_\mu = -c^2$$

$$\text{(III-4)} \quad \text{d'où} \quad U_\mu \dot{U}_\mu = 0$$

$$\text{(III-5)} \quad \text{et} \quad U_\mu \ddot{U}_\mu = -\gamma_0^2$$

$$\text{(III-33)} \quad \text{et} \quad S_{\mu\nu} U_\nu = ct_\mu$$

$$\text{(III-34)} \quad \text{d'où} \quad t_\mu U_\mu = 0.$$

Rappelons du reste que le vecteur d'espace propre t_μ est lié au vecteur Q_μ joignant, dans l'espace propre, le centre de matière au centre de masse :

$$t_\mu = -\mathcal{N}_0 c Q_\mu.$$

Pour fixer le vocabulaire, nous proposons de nommer ce vecteur le *balourd*, par analogie avec certaines notions de mécanique classique des corps solides.

Le module de G_μ , constant, permet de définir une masse propre d'impulsion :

$$M_0^2 c^2 = -G_\mu G_\mu = \text{const.}$$

De même, on a la masse propre d'inertie :

$$\mathcal{M}_0 c^2 = -G_\mu U_\mu.$$

En contractant (2) par U_ν , on obtient :

$$G_\mu = \mathcal{M}_0 U_\mu - \frac{1}{c^2} \dot{S}_{\mu\nu} U_\nu$$

ou, en dérivant (33)

$$\text{(III-35)}$$

$$G_\mu = \mathcal{M}_0 U_\mu + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \dot{U}_\nu - \frac{1}{c} \dot{t}_\mu.$$

La variation de la masse $\mathcal{M}_0$ avec le temps est donnée par :

$$\text{(III-36)}$$

$$\dot{\mathcal{M}}_0 c^2 = -G_\mu \dot{U}_\mu$$

puisque $\dot{G}_\mu = 0$.

Le deuxième membre peut se calculer en contractant (35) par $\dot{U}_\mu$

Le premier terme s'annule d'après (4).

Le second s'annule par antisymétrie.

Il reste :

$$G_\mu \dot{U}_\mu = -\frac{1}{c} \dot{t}_\mu \dot{U}_\mu$$

d'où

(III-37)

$$\mathfrak{M}_0 c^3 = \dot{t}_\mu \dot{U}$$

Contrairement à la goutte de Weyssenhoff, la goutte de Bohm-Vigier a une masse d'inertie qui varie en général au cours du temps, résultat que nous interpréterons tout à l'heure.

Dérivons l'équation (35) qui est la première équation dynamique

$$0 = \mathfrak{M}_0 \dot{U}_\mu + \mathfrak{M}_0 U_\mu + \frac{1}{c^2} \dot{S}_{\mu\nu} \dot{U}_\nu \\ + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \ddot{U}_\nu - \frac{1}{c} \ddot{t}_\mu$$

ou, en tenant compte de (2) et de (4)

$$0 = \mathfrak{M}_0 \dot{U}_\mu + \mathfrak{M}_0 U_\mu - \frac{1}{c^2} G_\mu U_\mu \dot{U} \\ + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \ddot{U}_\nu - \frac{1}{c} \ddot{t}_\mu$$

On voit d'après (36) que le troisième terme double le second, d'où finalement la deuxième loi dynamique :

$$\mathfrak{M}_0 \dot{U}_\mu + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \ddot{U}_\nu = \frac{1}{c} \ddot{t}_\mu - 2\mathfrak{M}_0 U_\mu$$

En la contractant par $\dot{U}_\mu$ et en tenant compte de (5)

$$\mathfrak{M}_0 \gamma_0 \dot{\gamma}_0 = \frac{1}{c} \dot{t}_\mu \dot{U}_\mu + 2\mathfrak{M}_0 \gamma_0^2$$

le module de l'accélération n'est plus constant.

Nous introduisons maintenant le vecteur s_μ par un raisonnement analogue à celui de Weyssenhoff. Pour éviter toute confusion avec le spin proprement dit, que nous retrouverons d'ici peu dans un cas particulier important, en relation avec la mécanique quantique dans laquelle ce mot consacré par l'usage désigne une grandeur bien déterminée, nous proposons de nommer le vecteur s_μ la *giration*. Nous verrons d'ailleurs que, dans le cas de Weyssenhoff, le vecteur s_μ que nous avons considéré

se confondra avec le vecteur que nous nommerons le spin, si bien qu'il n'y a pas d'inconvénient à employer les deux mots indifféremment dans la goutte de Weyssenhoff. Si nous considérons *dans le système propre* les composantes d'espace du moment angulaire interne, elles constituent un tenseur d'espace S_{ij}^0 dont nous prenons le dual dans l'espace propre

$$s_k^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} S_{ij}^0.$$

Nous définissons alors la giration comme le vecteur d'*univers* qui, dans le système propre, a pour composantes : s_1^0, s_2^0, s_3^0 et 0. Seulement ce vecteur ne résume plus toutes les données exprimées par $S_{\mu\nu}$, puisqu'il ne tient pas compte des composantes de temps. Au moyen de ces composantes de temps, on peut, suivant le même principe que Frenkel et Weyssenhoff, former *dans le système propre* un vecteur d'espace $t_k^0 = iS_{k4}^0$ vecteur qui, cette fois, n'est pas nul. Si on considère le vecteur d'*univers*

$$t_\mu = \frac{1}{c} S_{\mu\nu} U_\nu$$

on voit que, dans le système propre, il coïncide avec le vecteur précédent. Nous voyons donc dans le cas général reparaître le vecteur que Weyssenhoff forme avec les composantes de temps du moment angulaire. Mais il se présente comme un vecteur d'*univers* covariant, et il est nul intrinsèquement, précisément dans le cas traité par Weyssenhoff.

On peut, par le même raisonnement que plus haut, donner à la giration la même expression covariante :

(III-38)

$$s_\mu = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\mu} U_\nu S_{\alpha\beta}$$

d'où

(III-39)

$$s_\mu U_\mu = 0$$

et

(III-40)

$$s_\mu \dot{U}_\mu = -\dot{s}_\mu U_\mu$$

et il est facile de voir qu'on peut inversement exprimer de façon univoque le moment angulaire interne en fonction des deux vecteurs d'espace propre s_μ et t_μ .

Multiplions les deux membres de (38) par U_λ et prenons les duals :

$$\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\lambda\gamma\rho} s_\mu U_\lambda = \frac{1}{4c} \delta_{\lambda\gamma\rho}^{\nu\alpha\beta} U_\nu U_\lambda S_{\alpha\beta}$$

ou, en tenant compte de (3) et (33) :

$$\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\lambda\gamma\varrho} s_{\mu} U_{\lambda} = -\frac{c}{2} S_{\gamma\varrho} + \frac{1}{2} (U_{\gamma} t_{\varrho} - U_{\varrho} t_{\gamma})$$

soit enfin :

(III-41)

$$S_{\gamma\varrho} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\gamma\varrho\mu\lambda} U_{\mu} s_{\lambda} + \frac{1}{c} (U_{\gamma} t_{\varrho} - U_{\varrho} t_{\gamma})$$

Un raisonnement analogue donne le dual

$$\widehat{S}_{\mu\nu} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_{\alpha} t_{\beta} - \frac{1}{c} (U_{\mu} s_{\nu} - U_{\nu} s_{\mu}).$$

On voit que, dans un champ de vitesse d'univers donné, il y a correspondance biunivoque entre des moments angulaires représentés par des tenseurs antisymétriques *quelconques*, et des systèmes de deux vecteurs d'espace propre s_{μ} et t_{μ} . Dans l'espace propre, comme nous l'avions laissé prévoir, on retrouve les deux vecteurs s_k et t_k de Weyssenhoff, mais ce dernier est différent de zéro et la décomposition de $S_{\mu\nu}$ est covariante.

Nous pouvons à présent calculer divers produits contractés.

Ainsi on a :

$$c S_{\mu\nu} s_{\nu} = (i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_{\alpha} s_{\beta} + U_{\mu} t_{\nu} - U_{\nu} t_{\mu}) s_{\nu} = U_{\mu} t_{\nu} s_{\nu}$$

D'où

$$(III-42) \quad S_{\mu\nu} s_{\nu} = \frac{t_{\nu} s_{\nu}}{c} U_{\mu}.$$

$$\text{Et de même : } \widehat{S}_{\mu\nu} t_{\nu} = -\frac{t_{\nu} s_{\nu}}{c} U_{\mu}.$$

On a par analogie :

$$(III-43) \quad S_{\mu\nu} t_{\nu} = \frac{1}{c} (i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} t_{\nu} U_{\alpha} s_{\beta} + t_0^2 U_{\mu})$$

en posant $t_{\mu} t_{\mu} = t_0^2$.

$$\text{Et de même } \widehat{S}_{\mu\nu} s_{\nu} = \frac{1}{c} (-i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} t_{\nu} U_{\alpha} s_{\beta} - s_0^2 U_{\mu}).$$

Nous pouvons former le module du moment angulaire :

$$\begin{aligned} \Sigma_0^2 &= \frac{1}{2} S_{\mu\nu} S_{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{2c^2} \left[-2\delta_{\gamma\varrho}^{\alpha\beta} U_{\alpha} s_{\beta} U_{\gamma} s_{\varrho} + (U_{\mu} t_{\nu} - U_{\nu} t_{\mu})^2 \right] \end{aligned}$$

car les termes rectangles sont nuls.

Ceci donne, en tenant compte de (3), (34), (39)

$$\Sigma_0^2 = \frac{1}{2c^2} (2c^2 s_0^2 - c^2 t_0^2 - c^2 t_0^2)$$

$$\boxed{\Sigma_0^2 = s_0^2 - t_0^2}$$

Mais cette fois ce module n'est plus constant. En effet :

$$\Sigma_0 \dot{\Sigma}_0 = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \dot{S}_{\mu\nu}$$

ou, d'après (2) et (33) $\Sigma_0 \dot{\Sigma}_0 = \frac{2}{2} (ct_\mu G_\mu + ct_\nu G_\nu)$

$$\frac{d}{d\tau} \Sigma_0^2 \equiv 2 \Sigma_0 \dot{\Sigma}_0 = 4 ct_\mu G_\mu$$

Le module du dual donne de même :

$$\frac{1}{2} \widehat{S}_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\nu} = t_0^2 - s_0^2 = -\Sigma_0^2.$$

Enfin on peut former le produit semi contracté : $S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\lambda}$ qui donne, tous calculs faits :

$$S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} s_\mu t_\mu$$

ce qui donne en particulier

$$S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\nu} = 4 s_\mu t_\mu.$$

Enfin on peut également former la dérivée du scalaire $\frac{1}{2} S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\nu}$.

En prenant le dual de (2) on a

$$\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \dot{S}_{\alpha\beta} = \frac{d}{d\tau} \widehat{S}_{\mu\nu} = i s_{\mu\nu\alpha\beta} G_\alpha U_\beta.$$

D'où, tous calculs faits :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\nu} \right) = -4 c s_\mu G_\mu$$

§ 7. Relations diverses dans le cas général.

Pour étudier les dérivées des vecteurs s_μ et t_μ , on dérive (41) en tenant compte de (2)

$$c(G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu) = i s_{\mu\nu\alpha\beta} (\dot{U}_\alpha s_\beta + U_\alpha \dot{s}_\beta) + \dot{U}_\mu t_\nu - \dot{U}_\nu t_\mu + U_\mu \dot{t}_\nu - U_\nu \dot{t}_\mu.$$

Multiplions les deux membres par U_λ et prenons le dual en contractant par $\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$.

Le premier membre s'annule par antisymétrie

$$0 = -\frac{1}{2} 2 s_{\lambda\beta}^\alpha (\dot{U}_\alpha s_\beta + U_\alpha \dot{s}_\beta) U_\lambda + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (\dot{U}_\mu t_\nu - \dot{U}_\nu t_\mu + U_\mu \dot{t}_\nu - U_\nu \dot{t}_\mu) U_\lambda$$

Les deux derniers termes s'annulent par antisymétrie. Des termes en $\delta_{\lambda\rho}^{\alpha\beta}$, il ne reste, en tenant compte de (3) (4) et (39) que :

$$c^2 \dot{s}_\rho + U_\lambda \dot{s}_\lambda U_\rho = c^2 \dot{s}_\rho - s_\lambda \dot{U}_\lambda U_\rho \text{ d'après (40)}$$

D'où :

$$c^2 \dot{s}_\rho = s_\lambda \dot{U}_\lambda \cdot U_\rho - i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \dot{U}_\mu t_\nu U_\lambda$$

On en tire immédiatement ⁽²⁰⁾

$$\dot{s}_\mu \dot{U}_\nu = 0 \quad \text{et} \quad \dot{s}_\mu t_\mu = 0.$$

On peut aussi, en contractant par s_ρ , écrire :

$$\dot{s}_\mu s_\mu = \dot{s}_0 s_0 = \frac{i}{c^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} s_\mu U_\nu \dot{U}_\alpha t_\beta.$$

Ce qui montre que le module de la giration n'est pas constant en général.

Introduisons, comme dans le cas de Weyssenhoff, l'impulsion transversale P_μ orthogonale au courant, en posant :

$$G_\mu = \mathcal{N}_0 U_\mu - P_\mu \quad (P_\mu U_\mu = 0).$$

La première équation dynamique (35) donne directement :

$$P_\mu = \frac{1}{c} \dot{t}_\mu - \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \dot{U}_\nu$$

ou, en remplaçant $S_{\mu\nu}$ par l'expression (41)

$$c^2 P_\mu = i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\nu \dot{U}_\alpha \dot{s}_\beta + c^2 \dot{t}_\mu - t_\nu \dot{U}_\nu \cdot U_\mu$$

cette relation constitue à la fois une expression de P_μ et une expression de $\dot{t}_\mu$.

En la contractant par $\dot{U}_\mu$ ou par s_μ , il vient : $P_\mu \dot{U}_\mu = \frac{1}{c} \dot{t}_\mu \dot{U}_\mu = c^2 \dot{\mathcal{N}}_0$ d'après (37) et :

$$P_\mu s_\mu = \frac{1}{c} \dot{t}_\mu s_\mu.$$

On peut exprimer ces deux égalités en disant que le vecteur $cP_\mu - \dot{t}_\mu$ est orthogonal à l'accélération $\dot{U}_\mu$ et à la giration s_μ . Par contre ce vecteur n'est pas orthogonal au courant :

$$(cP_\mu - \dot{t}_\mu) U_\mu = t_\mu \dot{U}_\mu \neq 0.$$

De même la giration n'est pas orthogonale à l'accélération d'univers.

Les quatre vecteurs $P_\mu - \frac{1}{c} \dot{t}_\mu$, U_μ , $\dot{U}_\mu$, s_μ ne forment pas en général un système d'axes orthogonaux, tant du moins que $s_\mu \dot{U}_\mu$ et $t_\mu \dot{U}_\mu$ sont

différents de zéro. On peut calculer ces deux produits scalaires par contraction de la deuxième équation dynamique :

$$(III-44) \quad \mathcal{M}_0 \dot{U}_\mu + \frac{1}{c^2} S_{\mu\nu} \ddot{U}_\nu = \frac{1}{c} \ddot{t}_\mu - 2\mathcal{M}_0 U_\mu.$$

Contractons d'abord par s_μ :

$$\mathcal{M}_0 c^3 s_\mu \dot{U}_\mu = c^2 s_\mu \ddot{t}_\mu - c^2 S_{\mu\nu} s_\mu \ddot{U}_\nu.$$

Or d'après (42) :

$$-c S_{\mu\nu} s_\mu \ddot{U}_\nu = t_\lambda s_\lambda \cdot U_\nu \ddot{U}_\nu = -t_\lambda s_\lambda \gamma_0^2 \quad \text{d'après (5).}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{M}_0 c^3 s_\mu \dot{U}_\mu = s_\mu (c^2 \ddot{t}_\mu - \gamma_0^2 t_\mu)}$$

De même si on contracte (44) par t_μ :

$$\mathcal{M}_0 c^3 t_\mu \dot{U}_\mu = c^2 t_\mu \ddot{t}_\mu - c S_{\mu\nu} t_\mu \ddot{U}_\nu.$$

Or d'après (43) :

$$\begin{aligned} -c S_{\mu\nu} t_\mu \ddot{U}_\nu &= -i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} t_\mu U_\alpha s_\beta \ddot{U}_\nu + t_\mu t_\mu \cdot U_\nu \ddot{U}_\nu \\ &= i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \ddot{U}_\mu t_\nu U_\alpha s_\beta - t_\mu t_\mu \gamma_0^2. \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\boxed{\mathcal{M}_0 c^3 t_\mu \dot{U}_\mu = t_\mu (c^2 \ddot{t}_\mu - \gamma_0^2 t_\mu) + i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \ddot{U}_\mu t_\nu U_\alpha s_\beta}$$

On voit le rôle important joué dans ces relations par le vecteur $c^2 \ddot{t}_\mu - \gamma_0^2 t_\mu$ et le pseudoscalaire $i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \ddot{U}_\mu t_\nu U_\alpha s_\beta$.

Étudions pour finir le *rayon vecteur* R_μ reliant dans l'espace d'inertie le centre de gravité au centre de masse

$$M_0^2 c^2 R_\mu = S_{\mu\nu} G_\nu \quad \text{avec} \quad R_\mu G_\mu = 0.$$

On a $M_0^2 c^2 R_\mu U_\mu = -c t_\nu G_\nu = c t_\nu P_\nu$.

De même, d'après (42) $M_0^2 c^2 R_\mu s_\mu = \mathcal{M}_0 c s_\nu t_\nu$.

Le rayon vecteur n'est plus orthogonal ni au courant, ni à la rotation.

La dérivée de R_μ est, comme dans le cas de Weyssenhoff :

$$(III-45) \quad \boxed{\dot{R}_\mu = U_\mu - \frac{\mathcal{M}_0}{M_0^2} G_\mu}$$

Si on contracte (45) par R_μ , il vient :

$$R_\mu \dot{R}_\mu = R_\mu U_\mu = \frac{t_\nu P_\nu}{M_0^2 c}.$$

Le rayon vecteur n'est plus de module constant.

Contractons enfin (45) par U_μ :

$$(III-46) \quad \begin{aligned} \dot{R}_\mu U_\mu &= -c^2 + \frac{\mathcal{M}_0^2 c^2}{M_0^2} \\ \dot{R}_\mu U_\mu &= \frac{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2}{M_0^2} c^2 \end{aligned}$$

On peut interpréter ces résultats en exprimant (45) et (46) dans le référentiel d'inertie où $G_k^I = 0$ (45) nous donne

$$(III-47) \quad \dot{R}_k^I = U_k^I = \alpha v_k$$

$$(III-48) \quad \text{et} \quad \dot{R}_4^I = U_4^I - \frac{\mathcal{M}_0}{M_0^2} ic M_0 = ic \left(\alpha - \frac{\mathcal{M}_0}{M_0} \right)$$

en posant $\alpha = (1 - v_0^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$, v_0 étant le module de la vitesse v_k du centre de matière relativement au système d'inertie. La relation (47) est évidente, l'origine de R_k^I étant au repos dans l'espace d'inertie.

Exprimons de même la relation (46)

$$\dot{R}_k^I U_k^I + \dot{R}_4^I U_4^I = \alpha v_k \alpha v_k + ic \left(\alpha - \frac{\mathcal{M}_0}{M_0} \right) ic \alpha = \alpha^2 v_0^2 - \alpha^2 c^2 + \alpha c^2 \frac{\mathcal{M}_0}{M_0} = \frac{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2}{M_0^2} c^2$$

or

$$\alpha^2 v_0^2 - \alpha^2 c^2 = -c^2.$$

Il vient donc : $-c^2 + \alpha c^2 \frac{\mathcal{M}_0}{M_0} = \frac{\mathcal{M}_0^2}{M_0^2} c^2 - c^2$ soit :

$$\alpha = \frac{\mathcal{M}_0}{M_0}$$

Cette relation aurait du reste pu être prévue à partir de la définition du centre de matière, suivant laquelle ce point se trouve nécessairement et constamment dans la même coupe d'espace que le centre de gravité dans le système d'inertie. Dès lors on a non seulement $R_4^I = 0$ mais

aussi $\dot{R}_4^I = 0$ c'est-à-dire, d'après (48) : $\alpha = \frac{\mathcal{M}_0}{M_0}$. Comme $\alpha = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

on a immédiatement l'expression de la vitesse v_0 :

$$v_0^2 = \frac{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2}{\mathcal{M}_0^2} c^2$$

Ces dernières relations avaient été trouvées déjà dans le cas de Weyssenhoff ⁽²⁾. Elles ont une valeur et une signification générale. On voit que la constance de la masse d'inertie chez Weyssenhoff est liée à la

grandeur constante de la vitesse du centre de matière dans le système d'inertie. Dans le cas général au contraire, la masse $\mathcal{M}_0$ variant au cours du temps, il en sera de même de la vitesse. D'autre part, on voit qu'on peut écrire

$$\mathcal{M}_0 = \alpha M_0$$

relation qui a une signification immédiate : La masse d'inertie est la masse que posséderait relativement au système d'inertie un corpuscule ponctuel localisé au centre de matière et ayant pour masse *propre* la masse d'impulsion (constante) de la goutte.

§ 8. Corpuscule classique de Dirac.

Nous avons vu que le système des équations de Frenkel Weyssenhoff détermine entièrement — aux conditions initiales près — le mouvement global de la goutte, en l'espèce le mouvement du centre de matière. Cela ressort du reste directement de la considération du nombre d'équations auxquelles doivent satisfaire les 14 variables indépendantes représentées par les deux vecteurs U_μ et G_μ et par le tenseur antisymétrique $S_{\mu\nu}$ soit :

Une condition scalaire : $U_\mu U_\mu = -c^2$.

Une condition vectorielle : $S_{\mu\nu} U_\nu = 0$ mais qui n'exprime que trois équations indépendantes, car, en la contractant par U_μ , on obtient une identité en raison de l'antisymétrie de $S_{\mu\nu}$.

Une équation vectorielle $\dot{G}_\mu = 0$.

Enfin une équation tensorielle à six composantes indépendantes : $\dot{S}_{\mu\nu} = G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu$.

On a donc bien 14 équations distinctes.

Par contre, le cas général que nous venons d'étudier reste encore largement indéterminé. Plus précisément, comme on a simplement supprimé la condition $S_{\mu\nu} U_\nu = 0$ le mouvement comporte une *triple* indétermination. Pour aller plus loin, il devient nécessaire d'introduire trois conditions distinctes, et pour cela de formuler de nouvelles hypothèses physiques qui achèvent de déterminer le mouvement. Nous procéderons par étapes en restreignant d'abord la généralité par deux conditions seulement. Nous ferons porter les hypothèses sur les deux vecteurs s_μ et t_μ dans lesquels se décompose le moment angulaire.

La première restriction consistera à supposer les deux vecteurs s_μ et t_μ *colinéaires* ⁽⁶¹⁾. Comme ils sont tous deux dans l'espace propre, cela reviendra à exprimer la coïncidence de deux directions *dans l'espace*, ce qui implique deux conditions distinctes. L'intérêt de cette hypothèse

tient à ce que l'expression du mouvement vient alors rejoindre un formalisme bien connu et très important de la mécanique quantique, le formalisme de Dirac, plus exactement ce que nous avons appelé le formalisme du corpuscule classique de Dirac.

On sait qu'à partir du spineur de Dirac ψ (et indépendamment de l'équation d'onde), on peut définir un ensemble de grandeurs tensorielles que la mécanique quantique interprète comme des densités de valeurs moyennes pour le corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ ⁽⁵⁵⁾. Considérons les matrices

de Von Newman γ_μ et les matrices qui en dérivent, en particulier $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, et les quatre matrices $\widehat{\gamma}_\mu = i\gamma_\mu\gamma_5$.

On remarquera que la matrice γ_5 , qui anticommute avec les quatre γ_μ , joue, compte tenu des relations de commutation, un rôle analogue au symbole $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, quand on l'applique à un produit antisymétrique de matrices γ . Ainsi on a :

$$\gamma_5(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) = (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_5 = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta$$

Si on pose $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_4$ ($\psi^\dagger$ étant le conjugué hermitique de ψ), on définit ainsi :

un scalaire $\Omega = \bar{\psi}\psi$

un (pseudo) scalaire $\widehat{\Omega} = i\bar{\psi}\gamma_5\psi$

un vecteur $S_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$

un (pseudo) vecteur $\widehat{S}_\mu = -\bar{\psi}\widehat{\gamma}_\mu\psi = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$

un tenseur antisymétrique $M_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\psi$.

Contrairement au cas des fonctions d'onde scalaires qu'on norme en posant simplement $\psi^\dagger\psi = 1$, on voit qu'on a ici deux invariants Ω et $\widehat{\Omega}$, et on norme le spineur en posant

$$\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2 = 1$$

L'interprétation physique du formalisme de Dirac conduit alors aux identifications suivantes *relatives à un corpuscule* :

La vitesse unitaire est $U_\mu = cS_\mu$.

Le spin est $\sigma_\mu = \frac{\hbar}{2}\widehat{S}_\mu$.

Le moment magnétoélectrique est $\mu_{\alpha\beta} = -\frac{\hbar}{2}\frac{e}{mc}M_{\alpha\beta}$ ce qui nous amène, en vertu de l'hypothèse de Frenkel, à introduire un moment angulaire interne

$$S_{\alpha\beta} = \frac{m_0c}{e}\mu_{\alpha\beta} = -\frac{\hbar}{2}M_{\alpha\beta}.$$

Ceci dit, on sait qu'il existe entre les combinaisons bilinéaires définies plus haut, une série de relations quadratiques indépendantes des équations d'ondes et résultant simplement d'identités existant entre certains produits des éléments des matrices γ . De ces relations établies par Pauli et Koffinck (^{56. 57. 58}) résultent immédiatement des relations entre les grandeurs dynamiques caractérisant le corpuscule.

Ainsi les trois relations :

$$S_\mu S_\mu = -(\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2) \quad \widehat{S}_\mu \widehat{S}_\mu = (\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2) \quad S_\mu \widehat{S}_\mu = 0$$

donnent pour la vitesse unitaire et le spin :

$$U_\mu U_\mu = -c^2 \quad \sigma_\mu \sigma_\mu = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \quad U_\mu \sigma_\mu = 0.$$

Pour le tenseur antisymétrique $M_{\mu\nu}$, on a les relations :

$$M_{\mu\nu} S_\nu = -\widehat{\Omega} \widehat{S}_\mu \quad \text{et} \quad \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} M_{\alpha\beta} S_\nu = -\Omega \widehat{S}_\mu.$$

Pour les interpréter, on doit exprimer les deux invariants reliés par la relation de norme en fonction d'une variable unique pour laquelle Takabayasi (⁹) choisit un angle A . On pose :

$$\Omega = \cos A \quad \widehat{\Omega} = \sin A$$

et on a alors :

$$\frac{2}{\hbar c} S_{\mu\nu} U_\nu = \frac{2}{\hbar} \sigma_\mu \sin A$$

et

$$\frac{2}{\hbar c} \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta} U_\nu = -\frac{2}{\hbar} \sigma_\mu \cos A$$

Mais si nous nous reportons au formalisme de la goutte de Bohm-Vigier, on voit que ces relations se traduisent simplement par :

$$t_\mu = \sigma_\mu \sin A \\ s_\mu = \sigma_\mu \cos A.$$

Autrement dit les vecteurs t_μ et s_μ sont colinéaires, on peut écrire : $t_\mu = \lambda s_\mu$ le scalaire λ étant la tangente de l'angle A de Takabayasi. Ainsi en supposant colinéaires le balourd et la giration, nous nous plaçons dans un cas qui rejoint le formalisme de Dirac et nous introduisons, en addition aux variables de Weyssenhoff, une variable nouvelle correspondant au mystérieux angle A de Takabayasi et que nous interprétons en termes de dynamique classique des gouttes fluides, comme le rapport entre le balourd et la giration.

§ 9. Balourd et giration colinéaires : signification.

On peut du reste essayer de se faire une idée de la signification physique de cette hypothèse en considérant un modèle inspiré des travaux de Poincaré sur les masses fluides en rotation ⁽¹⁵⁾. Ce savant a montré que, lorsqu'il existe des tensions internes, les masses fluides tendent vers des configurations stables qui sont de révolution autour de l'axe, telles que par exemple, un tore en rotation. Supposons ⁽¹⁴⁾ qu'on introduise dans une telle masse des tourbillons internes, qui, sans modifier la distribution de matière, détruisent, comme nous l'avons vu, la symétrie de la distribution de masse, et reprenons sur une base plus générale le raisonnement que nous avons ébauché dans le cas de la goutte de Weyssenhoff, en considérant cette fois une giration s_k^0 et un balourd t_k^0 dans l'espace propre du centre géométrique du tore.

Il convient de considérer séparément deux types de dissymétrie qui peuvent intervenir dans la distribution des tourbillons. D'une part, on peut avoir une dissymétrie *latérale*, qui se marquera en ce que, en projetant tous les tourbillons sur le plan équatorial du tore, on en trouvera beaucoup plus d'un côté que de l'autre (ou du moins la somme $\sum_i \omega_i \mathbf{r}_i$

sera plus grande pour une des moitiés que pour l'autre). Alors le centre de masse se séparera du centre de matière et s'éloignera *dans le plan équatorial* dans la direction où $\sum_i \omega_i \mathbf{r}_i$ sera le plus grand. On aura donc

un vecteur d'espace propre t_k qui sera dans le plan équatorial. Quant au vecteur s_k , dual d'espace des composantes d'espace propre S_{ij}^0 du moment angulaire, il pourra être dirigé le long de l'axe de rotation, comme il le serait pour des raisons de symétrie s'il n'y avait pas de tourbillons. Mais en général il est plus probable qu'il fera un certain angle avec l'axe de rotation, les tourbillons introduisant un certain moment orbital supplémentaire non symétrique, auquel peut s'ajouter un moment de rotation propre dû à leurs propres spins, au cas où ceux-ci seraient aussi orientés de façon dissymétrique. On aura donc un cas relativement compliqué. Néanmoins il est facile de prévoir, si les tourbillons sont suffisamment nombreux, que cet état ne pourra en général pas se maintenir longtemps. En effet le fait signalé plus haut que la rotation orbitale s'effectue généralement avec des vitesses angulaires variables suivant la distance à l'axe, va amener les tourbillons à changer d'azimuts respectifs et, s'ils sont nombreux, et, à plus forte raison, s'ils s'influencent, les lois statistiques nous apprennent qu'en peu de tours, ils aboutiront à une distribution moyenne uniforme autour de

l'axe, tant pour ce qui est de leurs $\omega_i \mathbf{r}_i$ que pour ce qui concerne leurs spins. Donc, sauf le cas où une loi dynamique spéciale maintiendraient une certaine dissymétrie, comme nous en avons montré la nécessité dans le cas de Weyssenhoff, nous en arriverons rapidement à un centre de masse de nouveau confondu avec le centre de matière, donc à un balourd t_k nul, et d'autre part à une giration s_k couchée sur l'axe de rotation.

Supposons au contraire que la distribution des tourbillons varie *dans la direction de l'axe du tore*, que par exemple en le coupant par des plans perpendiculaires à l'axe, on rencontre une densité de tourbillons de plus en plus grande quand on se déplace vers une des extrémités de l'axe. Et supposons pour simplifier qu'au contraire la distribution azimutale des tourbillons soit de révolution, par exemple à la suite de l'uniformisation statistique que nous venons de décrire. Alors la distribution de matière restant symétrique par rapport au plan équatorial, le centre de matière restera à l'intersection de ce plan avec l'axe. Par contre, la distribution de masse, tout en restant de révolution, ne sera plus symétrique et le centre de masse sortira du plan équatorial en se déplaçant *le long de l'axe*. Le vecteur t_k sera donc le long de l'axe. Quant au vecteur s_k , le phénomène étant de révolution, il sera aussi sur l'axe et sera par conséquent colinéaire à t_k . Mais en outre il est facile de voir que cet état de mouvement sera beaucoup moins instable que le précédent. En effet, tous les mouvements étant circulaires et s'effectuant dans des plans perpendiculaires à l'axe, il n'y aura pas au premier abord d'influence d'un de ces plans sur l'autre, capable de rétablir rapidement l'uniformité de la distribution. Sans doute la dissymétrie pourra-t-elle faire naître dans le fluide des forces de tension interne qui ramèneront le centre de masse sur le centre de matière, mais il est permis de penser que l'action de ces forces sera très lente par rapport au mouvement de rotation de la masse fluide, et que pendant un intervalle de temps notable on aura affaire à un mouvement où le vecteur s_k sera sur l'axe de rotation et où le vecteur t_k y sera aussi, si bien qu'on aura effectivement la relation supposée tout à l'heure: $t_k = \lambda s_k$ ou $t_\mu = \lambda s_\mu$ qui permet de poser $\lambda = \text{tg } A$ et d'attribuer une signification à la variable $\text{tg } A$.

Il semble donc possible de justifier, au moins qualitativement, par des considérations classiques, le fait que les vecteurs s_μ et t_μ sont colinéaires pour le corpuscule de Dirac.

Par contre, la condition $\sigma_\mu \sigma_\mu = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$ qui implique que le module du spin, vecteur d'espace propre, reste constant au cours du temps, ne

nous paraît pouvoir être interprétée que du point de vue quantique. C'est pourquoi nous introduisons d'abord la première condition seule en posant :

$$s_\mu = \sigma_\mu \cos A \quad \text{et} \quad t_\mu = \sigma_\mu \sin A$$

le vecteur σ_μ ayant un module σ_0 variable en principe. Nous obtiendrons ainsi une dynamique moins générale que celle de la goutte de Bohm-Vigier dont le corpuscule de Dirac représentera un cas particulier entièrement déterminé par la condition $\sigma_\mu \sigma_\mu = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$ le corpuscule de Frenkel-Weyssenhoff constituant, par rapport à ce dernier, un cas encore plus particulier.

§ 10. Balourd et giration colinéaires : relations caractéristiques.

Les expressions, données dans le cas général, du moment angulaire et de son dual s'écrivent :

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta \cos A + \frac{1}{c} (U_\mu \sigma_\nu - U_\nu \sigma_\mu) \sin A \\ \frac{i}{2c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta} &= \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta \sin A - \frac{1}{c} (U_\mu \sigma_\nu - U_\nu \sigma_\mu) \cos A. \end{aligned}$$

Sous cette forme on reconnaît immédiatement deux identités de Pauli-Koffinck. De même les produits contractés de ces deux tenseurs par le spin σ_μ donnent deux autres identités connues :

$$\begin{aligned} \text{(III-50)} \quad S_{\mu\nu} \sigma_\nu &= \frac{\sigma_0^2 \sin A}{c} U_\mu \\ \frac{i}{2c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \sigma_\nu &= -\frac{\sigma_0^2 \cos A}{c} U_\mu \end{aligned}$$

en posant $\sigma_0^2 = \sigma_\mu \sigma_\mu$.

Il est possible de calculer, comme nous l'avons fait dans le cas de Weyssenhoff, les produits contractés $S_{\mu\nu} S_{\mu\lambda}$, $S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\lambda}$ en utilisant les produits contractés des symboles de Levi-Civita. Ainsi on a :

$$S_{\mu\nu} S_{\mu\lambda} = -\frac{1}{c^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_{\mu\lambda\gamma\delta} U_\gamma \sigma_\delta \cos^2 A + \frac{1}{c^2} (U_\mu \sigma_\nu - U_\nu \sigma_\mu) (U_\mu \sigma_\lambda - U_\lambda \sigma_\mu) \sin^2 A.$$

Les termes rectangles sont nuls car des expressions telles que $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta U_\mu \sigma_\nu$ s'annulent par antisymétrie.

Le premier terme s'écrit $-\frac{1}{c^2} \cos^2 A \delta_{\lambda\gamma}^{\nu\alpha} U_\alpha \sigma_\beta U_\gamma \sigma_\beta$.

En le développant et en tenant compte de l'orthogonalité de σ_μ et U_μ , il ne reste que : $\left(\sigma_0^2 \delta_{\nu\lambda} + \sigma_0^2 \frac{U_\nu U_\lambda - \sigma_\nu \sigma_\lambda}{c^2} \right) \cos^2 A$.

De même en effectuant le deuxième produit, il ne reste que :

$$\left(\sigma_0^2 \frac{U_\nu U_\lambda}{c^2} - \sigma_\nu \sigma_\lambda \right) \sin^2 A.$$

D'où finalement :

$$(III-51) \quad S_{\mu\nu} S_{\mu\lambda} = \sigma_0^2 \left(\delta_{\nu\lambda} \cos^2 A + \frac{U_\nu U_\lambda}{c^2} \right) - \sigma_\nu \sigma_\lambda$$

C'est encore une identité de Koffinck, d'où nous tirons en particulier (avec $\delta_{\nu\nu} = 4$) :

$$S_{\mu\nu} S_{\mu\nu} = \sigma_0^2 (4 \cos^2 A - 2) = 2\sigma_0^2 \cos 2A$$

que nous aurions pu tirer directement de la formule établie dans le cas général.

Enfin le produit $S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\lambda}$ donne de même :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{c^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_{\mu\lambda\gamma\tau} U_\gamma \sigma_\tau \cos A \sin A \\ & - \frac{1}{c^2} (U_\mu \sigma_\nu - U_\nu \sigma_\mu) (U_\mu \sigma_\lambda - U_\lambda \sigma_\mu) \sin A \cos A \\ & = (\sigma_0^2 \delta_{\nu\lambda} + \sigma_0^2 \frac{U_\nu U_\lambda}{c^2} - \sigma_\nu \sigma_\lambda) \cos A \sin A \\ & - \left(\sigma_0^2 \frac{U_\nu U_\lambda}{c^2} - \sigma_\nu \sigma_\lambda \right) \cos A \sin A. \end{aligned}$$

Il reste donc simplement :

$$S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \sigma_0^2 \delta_{\nu\lambda} \sin 2A$$

autre identité de Koffinck, d'où on tire en particulier :

$$S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\nu} = 2\sigma_0^2 \sin 2A.$$

Les dérivées des produits contractés prennent naturellement la forme

$$(III-52) \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} S_{\mu\nu} S_{\mu\nu} \right) = -2c \sigma_\mu P_\mu \cos A$$

$$(III-53) \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} S_{\mu\nu} \widehat{S}_{\mu\nu} \right) = 2c \sigma_\mu P_\mu \sin A.$$

Si nous reprenons les expressions des dérivées de s_μ et t_u , il vient :

$$(III-54) \quad c^2 \dot{s}_\mu = i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\nu \dot{U}_\alpha \sigma_\beta \sin A + \sigma_\nu \dot{U}_\nu \cos A U_\mu.$$

En contractant par σ_μ , on voit que

$$(III-55) \quad \dot{s}_\mu \sigma_\mu = 0$$

ce qui signifie, non seulement que $\dot{s}_\mu$ est orthogonal à t_μ comme dans le cas général, mais aussi que

$$\dot{s}_\mu s_\mu = 0$$

Autrement dit le module s_0 de la giration est *constant* au cours du temps, c'est là une propriété particulière, probablement la plus importante, du mouvement étudié :

$$s_0 = \sigma_0 \cos A = \text{const.}$$

On peut de même écrire :

$$(III-55') \quad c^2 \dot{t}_\mu = -i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\nu \dot{U}_\alpha \sigma_\beta \cos A + \sigma_\nu \dot{U}_\nu \sin A U_\mu + c^3 P_\mu.$$

Si nous contractons par σ_μ il vient :

$$\dot{t}_\mu \sigma_\mu = c P_\mu \sigma_\mu$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$(III-56) \quad \dot{t}_\mu t_\mu = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} t_\mu t_\mu \right) = c P_\mu \sigma_\mu \sin A$$

ce qui nous donne l'expression de la variation du module du balourd.

D'autre part on a :

$$(III-57) \quad \dot{s}_\mu = \dot{\sigma}_\mu \cos A - \sigma_\mu \dot{A} \sin A$$

$$(III-58) \quad \dot{t}_\mu = \dot{\sigma}_\mu \sin A + \sigma_\mu \dot{A} \cos A.$$

On peut donc former les dérivées de σ_μ et A :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_\mu &= \dot{s}_\mu \cos A + \dot{t}_\mu \sin A \\ \dot{A} \sigma_\mu &= -\dot{s}_\mu \sin A + \dot{t}_\mu \cos A \end{aligned}$$

ce qui donne, en employant les équations (54) et (55') :

$$(III-59) \quad c^2 \dot{\sigma}_\mu = \sigma_\nu \dot{U}_\nu U_\mu + c^3 P_\mu \sin A$$

et

$$(III-60) \quad c^2 \sigma_\mu \dot{A} = -i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U_\nu \dot{U}_\alpha \sigma_\beta + c^3 P_\mu \cos A$$

Ces relations fournissent facilement, par des multiplications contractées :

La variation du module du spin :

$$\frac{d}{d\tau} (\sigma_0^2) = 2 \sigma_\mu \dot{\sigma}_\mu = 2 c^3 P_\mu \sigma_\mu \sin A.$$

Deux expressions pour la variation de l'angle A :

$$(III-61) \quad \sigma_0^2 \dot{A} = c P_\mu \sigma_\mu \cos A \quad \sigma_\mu \dot{U}_\mu \dot{A} = c P_\mu \dot{U}_\mu \cos A.$$

Enfin le module de l'impulsion transversale :

$$c^4 P_\mu P_\mu \cos^2 A = \gamma_0^2 \sigma_0^2 - (\sigma_\nu \dot{U}_\nu)^2 + c^2 \dot{A}^2 \sigma_0^2.$$

D'autre part, nous pouvons utiliser ces expressions pour expliciter la variation de la masse d'inertie, qui est égale dans le cas général à

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 c^3 &= \dot{t}_\mu \dot{U}_\mu \\ \mathcal{M}_0 c^3 &= \dot{\sigma}_\mu \dot{U}_\mu \sin A + \sigma_\mu \dot{U}_\mu \cos A \cdot \dot{A}. \end{aligned}$$

Explicitons l'équation (55)

$$0 = \dot{\sigma}_\mu \dot{U}_\mu \cos A - \sigma_\mu \dot{U}_\mu \sin A \cdot \dot{A}.$$

Nous pouvons éliminer entre ces deux équations soit les termes en $\dot{\sigma}_\mu$, soit ceux en $\dot{A}$.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 c^3 \sin A &= \dot{U}_\mu \dot{\sigma}_\mu \\ \mathcal{M}_0 c^3 \cos A &= \dot{U}_\mu \sigma_\mu \dot{A}. \end{aligned}$$

Ou, en remplaçant $\dot{A}$ par sa valeur (61)

$$(III-62) \quad \boxed{\mathcal{M}_0 c^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sigma_\mu \dot{U}_\mu \cdot \sigma_\nu P_\nu}$$

Cette dernière expression nous indique dans quels cas particuliers la masse d'inertie sera constante au cours du temps.

Dans ces divers relations, nous voyons intervenir des invariants qui, dans le cas de Weyssenhoff, sont nuls, et qui dans le cas présent, sont cause que certains vecteurs ne sont plus orthogonaux, que certaines quantités ne sont plus constantes. C'est le cas notamment de $\sigma_\mu \dot{U}_\mu$ et surtout de $\sigma_\mu P_\mu$. Ce dernier intervient encore dans les relations portant sur le rayon vecteur R_μ , que nous nous contentons de transcrire : L'angle du rayon vecteur avec la vitesse unitaire dépend du produit :

$$(III-63) \quad M_0^2 c^2 R_\mu U_\mu = c \sigma_\mu P_\mu \sin A$$

c'est la même quantité qui intervient, on le sait, dans la variation du module de R_μ :

$$(III-64) \quad \frac{d}{d\tau} (R_0^2) = 2 R_\mu \dot{R}_\mu = \frac{2}{M_0^2 c} \sigma_\mu P_\mu \sin A.$$

Enfin l'angle du rayon vecteur et du spin dépend du produit :

$$(III-65) \quad M_0^2 c^2 R_\mu \sigma_\mu = \mathcal{M}_0 c \sigma_0^2 \sin A.$$

On voit que ces deux vecteurs ne seront orthogonaux que si $\sin A = 0$ c'est-à-dire uniquement dans le cas de Weyssenhoff.

§ 11. Corpuscule classique de Dirac : équations dynamiques.

Toutes les relations que nous venons d'établir suggèrent différentes voies intéressantes pour choisir la troisième relation qui achèvera de déterminer la dynamique du corpuscule. Nous nous en tiendrons au cas le plus intéressant pour la question qui nous occupe, celui où on astreint le corpuscule à satisfaire à la troisième condition de Dirac : $\sigma_\mu \sigma_\mu = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$.

En vue de conserver la plus grande généralité, nous nous contenterons de prendre σ_0^2 constant sans lui donner pour autant la valeur du quantum d'action.

Nous avons donné l'expression de la dérivée de σ_0^2

$$(III-66) \quad \frac{d}{d\tau} (\sigma_0^2) = 2c^3 P_\mu \sigma_\mu \sin A.$$

Elle est nulle dans deux cas :

$$1) \sin A = 0.$$

C'est simplement le cas de Weyssenhoff. Il ne nous intéresse pas. Remarquons du reste, en passant, que chez Weyssenhoff on a aussi $P_\mu \sigma_\mu = 0$. Si le second facteur de (66) est nul, le premier l'est aussi.

Mais la réciproque n'est pas vraie.

$$2) P_\mu \sigma_\mu = 0.$$

C'est le cas que nous allons étudier et qui achève de définir ce que nous nommerons le corpuscule classique de Dirac ⁽⁶²⁾. Nous allons donc reprendre nos formules en faisant $\sigma_0 = \text{const.}$ Ou, de façon équivalente : $P_\mu \sigma_\mu = 0$.

La relation $P_\mu \sigma_\mu = 0$ entraîne $G_\mu \sigma_\mu = 0$.

Le spin est un vecteur d'espace du système d'inertie. Dans l'espace de ce système, on a donc : $P_k \sigma_k = 0$.

Comme dans cet espace on a, d'après (17)

$$P_k = \mathfrak{M}_0 U_k = \mathfrak{M}_0 \alpha V_k$$

on a également $\sigma_k V_k = 0$.

La vitesse du centre de matière relativement au centre de gravité est orthogonale au spin (lequel du reste est variable avec le temps).

Les relations (52) et (53) nous montrent immédiatement que les produits contractés $S_{\mu\nu} S_{\mu\nu}$ et $S_{\mu\nu} \hat{S}_{\mu\nu}$ sont *constants* tous les deux.

La relation $s_0 = \sigma_0 \cos A = \text{const.}$ nous montre, puisque σ_0 est cons-

tant, que l'angle A est également constant. Ce qu'on voit du reste directement sur l'expression trouvée pour $\dot{A}$. Il en résulte que le module du balourd, $t_0 = \sigma_0 \sin A$ est aussi constant, ce qu'on constate du reste directement sur l'expression (56) de sa dérivée.

De plus l'équation (62) nous donne $\mathfrak{M}_0 c^2 = 0$.

La masse propre d'inertie de Weyssenhoff est également *constante*. Il en résulte que $G_\mu \dot{U}_\mu = 0$.

L'accélération est dans l'espace d'inertie. Il en résulte aussi, puisque

$\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mathfrak{M}_0}{M_0}$, que la vitesse du centre de matière relativement au système d'inertie est de grandeur constante.

De même le module de l'impulsion transversale

$$P_\mu P_\mu = \mathfrak{P}_0^2 c^2 = (\mathfrak{M}_0^2 - M_0^2) c^2$$

est également constant. Sa valeur se tire facilement de l'expression de P_μ qui, d'après (60) se réduit à

$$P_\mu = \frac{i_{\mu\nu\alpha\beta} U_\nu \dot{U}_\alpha \sigma_\beta}{c^3 \cos A}$$

d'où $P_\mu P_\mu = \frac{\gamma_0^2 \sigma_0^2 - (\sigma_\nu \dot{U}_\nu)^2}{c^4 \cos^2 A}$ en posant, comme pour le cas de Weyssenhoff : $\gamma_0^2 = \dot{U}_\mu \dot{U}_\mu$.

Enfin, l'expression (59) contractée par $\dot{U}_\mu$ nous donne :

$$\dot{\sigma}_\mu \dot{U}_\mu = c P_\mu \dot{U}_\mu \sin A$$

et comme $G_\mu \dot{U}_\mu = 0$, d'où on tire immédiatement $P_\mu \dot{U}_\mu = 0$, on voit que $\dot{\sigma}_\mu \dot{U}_\mu = 0$ ce qui entraîne, d'après (57) et (58) :

$$\dot{s}_\mu \dot{U}_\mu = 0 \quad \text{et} \quad \dot{i}_\mu \dot{U}_\mu = 0.$$

Introduisons maintenant le rayon vecteur R_μ . On voit d'après (63) que $R_\mu U_\mu = 0$.

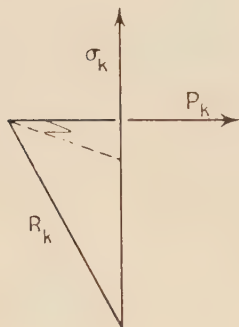
Le rayon vecteur (et par conséquent le centre de gravité) est dans l'espace propre. Nous pouvons, comme il est naturel, localiser le spin au centre de matière (momentanément au repos) et l'impulsion transversale au centre de gravité. Les relations

$$G_\mu R_\mu = 0 \quad \text{et} \quad P_\mu \sigma_\mu = 0$$

donnent respectivement dans le système propre :

$$P_k R_k = 0 \quad \text{et} \quad P_k \sigma_k = 0.$$

L'impulsion transversale est donc perpendiculaire au plan des vecteurs R_k et σ_k . Elle a la disposition ci-après, qui montre qu'il existe dans le cas considéré une relation étroite entre le mouvement « orbital », caractérisé par une impulsion résiduelle dans le système où le centre de matière est immobile, et d'autre part la rotation « propre » exprimée par le spin.



On doit se rappeler toutefois que les éléments ainsi représentés sont des éléments *instantanés*, le spin variant au cours du temps, et le centre de matière n'étant au repos dans le référentiel en question qu'à l'instant considéré.

La relation (64) nous donne $R_\mu \dot{R}_\mu = 0$.

Si on se place dans le système d'inertie Σ_I où le centre de gravité, origine du rayon vecteur, est constamment au repos, on a $R_k \dot{R}_k = 0$.

Le centre de matière reste à une distance constante du centre de gravité. Il se déplace sur une sphère dont il est facile de calculer le rayon R_0 :

On a $R_\mu R_\mu \cdot M_0^2 c^4 = S_{\mu\nu} G_\nu \cdot S_{\mu\lambda} G_\lambda$ ce qui donne, d'après (51) :

$$M_0^2 c^4 R_0^2 = \left(\sigma_0^2 \delta_{\nu\lambda} \cos^2 A + \sigma_0^2 \frac{U_\nu U_\lambda}{c^2} - \sigma_\nu \sigma_\lambda \right) G_\nu G_\lambda.$$

D'où :

$$R_0^2 = \frac{\sigma_0^2 (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \cos^2 A)}{M_0^4 c^2}$$

Remplaçons maintenant, dans l'expression du rayon vecteur : $M_0^2 c^2 R_\mu = S_{\mu\nu} G_\nu$, G_ν par son expression (35) :

$$M_0^2 c^2 R_\mu = \mathcal{N}_0 S_{\mu\lambda} U_\lambda - \frac{S_{\mu\lambda} \dot{t}_\lambda}{c} - \frac{S_{\mu\nu} S_{\lambda\nu} \dot{U}_\nu}{c^2}.$$

Le premier terme du second membre est simplement

$$\mathcal{N}_0 c t_\mu = \mathcal{N}_0 c \sigma_\mu \sin A.$$

Le second terme donne (puisque $\dot{A} = 0$) : $-\frac{S_{\mu\lambda} \dot{\sigma}_\lambda \sin A}{c}$.

Or on a d'après (50) : $S_{\mu\nu} \sigma_\lambda = \frac{\sigma_0^2 \sin A \cdot U_\lambda}{c}$ et d'autre part

$$\dot{S}_{\mu\lambda} \sigma_\lambda = (G_\mu U_\lambda - G_\lambda U_\mu) \sigma_\lambda = 0 \quad \text{puisque} \quad \sigma_\lambda U_\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_\lambda G_\lambda = 0.$$

$$\text{Il reste} \quad S_{\mu\lambda} \dot{\sigma}_\lambda = \frac{\sigma_0^2 \sin A \cdot \dot{U}_\lambda}{c}.$$

Enfin le troisième terme donne, d'après (51) : $-\frac{\sigma_0^2 \dot{U}_\mu \cos^2 A - \sigma_0^2 \sigma_\nu \dot{U}_\nu \sigma_\mu}{c^2}$.
On a ainsi :

$$(III-68) \quad M_0^2 c^2 R_\mu = \left(\mathcal{N}_0 c \sin A + \frac{\sigma_\nu \dot{U}_\nu}{c^2} \right) \sigma_\mu - \frac{\sigma_0^2}{c^2} \dot{U}_\mu.$$

Cette relation fournit l'expression de R_0^2

$$(III-69) \quad M_0^2 c^2 R_0^2 = \left(\mathcal{N}_0 c \sin A + \frac{\sigma_\nu \dot{U}_\nu}{c^2} \right) \sigma_\mu R_\mu - \frac{\sigma_0^2}{c^2} \dot{U}_\mu R_\mu.$$

On remplace R_0^2 par son expression (67), $\sigma_\mu R_\mu$ par son expression (65) et $\dot{U}_\mu R_\mu$ par $-U_\mu \dot{R}_\mu$ qui nous est donnée par la formule (46). Ces identifications permettent de tirer de l'égalité (69) l'expression de l'invariant $\sigma_\nu \dot{U}_\nu$:

$$\sigma_\nu \dot{U}_\nu = - \frac{(\mathcal{N}_0^2 - M_0^2) c^3 \sin A}{\mathcal{N}_0}$$

expression qui est constante dans le temps. Enfin, en portant cette valeur dans l'expression de $P_\mu P_\mu$, on obtient une relation entre les invariants :

$$\gamma_0^2 \sigma_0^2 \mathcal{N}_0^2 = (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2) (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) c^6,$$

relation qui montre que l'accélération $\dot{U}_\mu$ est de module constant.

Nous savons que $\dot{U}_\mu$ est dans l'espace du système d'inertie. Dans cet espace, il permet de définir, en passant au temps du système d'inertie un vecteur accélération $\Gamma_k = \frac{M_0^2}{\mathcal{N}_0^2} \dot{U}_k^I$ qui est de grandeur constante $\Gamma_0 = \frac{M_0^2}{\mathcal{N}_0^2} \gamma_0$ soit

$$(III-70) \quad \Gamma_0 = \frac{M_0^2 c^3}{\mathcal{N}_0^2 \sigma_0} \sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2} \sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}.$$

Si nous portons la valeur trouvée pour $\sigma_\nu \dot{U}_\nu$ dans l'expression (68) du rayon vecteur, elle devient :

$$(III-71) \quad R_\mu = \frac{\sigma_\mu \sin A}{\mathcal{N}_0 c} - \frac{\sigma_0^2 \dot{U}_\mu}{M_0^2 c^4}.$$

Ainsi, dans l'espace d'inertie, le spin, l'accélération et le rayon vecteur sont coplanaires. Enfin, si nous dérivons cette dernière équation, il vient :

$$(III-72) \quad \dot{R}_\mu = \frac{\dot{\sigma}_\mu \sin A}{\mathcal{N}_0 c} - \frac{\ddot{U}_\mu \sigma_0^2}{M_0^2 c^4}.$$

Nous savons, d'après la théorie générale, que $\dot{R}_\mu = U_\mu - \frac{\mathcal{N}_0}{M_0^2} G_\mu$.

D'autre part, en portant dans l'équation (59) l'expression trouvée pour $\sigma_\mu \dot{U}_\mu$, on a

$$(III-73) \quad c^2 \dot{\sigma}_\mu = - \frac{(\mathcal{N}_0^2 - M_0^2) c^3 \sin A}{\mathcal{N}_0} U_\mu + c^2 P_\mu \sin A.$$

L'équation (72) devient alors :

$$U_\mu - \frac{\mathcal{N}_0}{M_0^2} G_\mu = - \frac{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2}{\mathcal{N}_0^2} \sin^2 A \cdot U_\mu - \frac{\sin^2 A}{\mathcal{N}_0} P_\mu - \frac{\sigma_0^2}{M_0^2 c^4} \ddot{U}_\mu$$

ou encore, en tenant compte de $G_\mu = \mathcal{N}_0 U_\mu - P_\mu$.

(III-74)

$$M_0^2 c^4 U_\mu (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) + \mathcal{N}_0^2 \sigma_0^2 \ddot{U}_\mu = (\mathcal{N}_0^2 + M_0^2 \sin^2 A) \mathcal{N}_0 c^4 G_\mu$$

qui constitue l'équation du mouvement.

Cette équation est du second ordre en U_μ ou du troisième ordre relativement aux coordonnées du centre de matière, comme l'équation de Mathisson dont elle constitue une généralisation. On prendra garde que le deuxième membre est un vecteur constant puisque $\dot{G}_\mu = 0$.

§ 12. Corpuscule classique de Dirac : intégration du mouvement

Plaçons-nous dans l'espace d'inertie Σ_I pour lequel $G_k^I = 0$.

Nous obtenons l'équation de l'hodographe :

$$M_0^2 c^4 (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) U_k^I + \mathcal{N}_0^2 \sigma_0^2 \ddot{U}_k^I = 0$$

ou, en tenant compte de $\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mathcal{N}_0}{M_0}$

$$(III-75) \quad M_0^2 c^4 (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) V_k + \mathcal{N}_0^2 \sigma_0^2 \frac{d^2 V_k}{dt^2} = 0$$

Il est visible que l'hodographe restera constamment dans un plan, déterminé par l'orientation initiale de la vitesse et de l'accélération, orientation initiale qui, on le sait, sont arbitraires pour chacun de ces deux vecteurs. D'autre part, comme nous avons vu que la vitesse et l'accélération sont de grandeur constante, l'hodographe sera un *cercle* de rayon v_0 :

$$(III-76) \quad v_0^2 = c^2 \left(1 - \frac{M_0^2}{\mathcal{N}_0^2}\right)$$

d'après (49).

Il est parcouru d'un mouvement uniforme, la vitesse angulaire étant immédiatement tirée de l'équation (75):

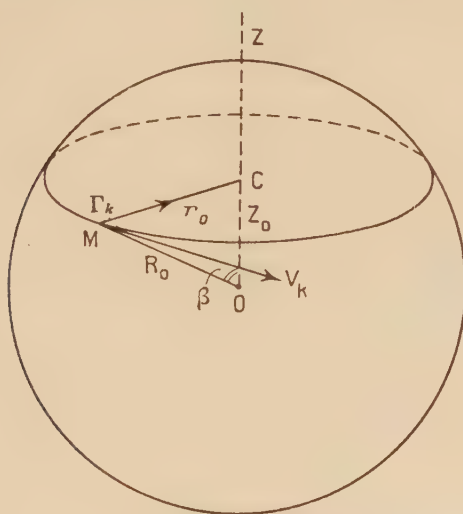
$$(III-77) \quad \omega = \frac{M_0^2 c^2 \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}{\mathcal{M}_0^2 \sigma_0}.$$

Le mouvement du centre de matière s'effectue sur la sphère ayant son centre au centre de gravité et un rayon

$$R_0 = \frac{\sigma_0}{M_0^2 c} \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2 \cos^2 A}.$$

Il reste dans un plan parallèle à l'hodographe. C'est donc un mouvement circulaire et uniforme ayant ω pour vitesse angulaire.

Il est possible de déterminer son centre et son rayon, l'orientation du



plan seule dépendant des conditions initiales. Si le rayon du cercle est r_0 , on a la relation $v_0 = r_0 \omega$ d'où on tire r_0 , puisque v_0 et ω sont connus, Il vient :

$$(III-78) \quad r_0 = \frac{c}{\mathcal{M}_0} \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2} \frac{\mathcal{M}_0^2 \sigma_0}{M_0^2 c^2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}$$

$$r_0 = \frac{\mathcal{M}_0 \sigma_0}{M_0^2 c} \sqrt{\frac{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2}{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}.$$

Si on appelle β l'angle *constant* que fait le rayon vecteur avec l'axe fixe Oz autour duquel s'effectue le mouvement, on a :

$$\sin \beta = \frac{r_0}{R_0} \quad \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{r_0^2}{R_0^2 - r_0^2}.$$

En remplaçant r_0 et R_0 par leurs valeurs, on trouve facilement :

$$(III-79) \quad R_0^2 - r_0^2 = \frac{\sigma_0^2 \sin^2 A \cos^2 A}{c^2 (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A)} = \overline{OC}^2 = Z_0^2$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\mathcal{N}_0 \sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2}}{M_0^2 \sin 2A}.$$

Cet axe de rotation n'est du reste nullement confondu avec le spin, contrairement au cas de Weyssenhoff.

La position du point C est déterminée relativement au centre de gravité fixe par le vecteur

$$(III-80) \quad (OC)_k = Z_k = R_k + \frac{\Gamma_k}{\Gamma_0} r_0$$

car le vecteur accélération passe évidemment par le centre du mouvement. Calculons le vecteur d'univers :

$$Z_\mu = R_\mu + \frac{\dot{U}_\mu}{\gamma_0} r_0$$

en tenant compte des formules (71) et (78) :

$$(III-81) \quad \begin{aligned} Z_\mu &= \frac{\sigma_\mu \sin A}{\mathcal{N}_0 c} - \frac{\dot{U}_\mu \sigma_0^2}{M_0^2 c^4} + \frac{\mathcal{N}_0 \sigma_0 \dot{U}_\mu}{c^3 \sqrt{(\mathcal{N}_0^2 - M_0^2)(\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A)}} \frac{\mathcal{N}_0 \sigma_0}{M_0^2 c} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2}{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}} \\ &= \frac{\sigma_\mu \sin A}{\mathcal{N}_0 c} + \frac{\dot{U}_\mu \sigma_0^2 M_0^2 \sin^2 A}{M_0^2 c^4 (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A)} \end{aligned}$$

$$\boxed{Z_\mu = \frac{\sigma_\mu \sin A}{\mathcal{N}_0 c} + \frac{\dot{U}_\mu \sigma_0^2 \sin^2 A}{(\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) c^4}}.$$

Montrons que ce point est fixe. On dérive l'expression (81) en tirant $\dot{\sigma}_\mu$ de (73) et $\dot{U}_\mu$ de (74) :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_\mu &= \frac{\sin A}{\mathcal{N}_0 c} \left(\frac{M_0^2 c U_\mu}{\mathcal{N}_0} - c G_\mu \right) \sin A \\ &\quad + \frac{\sigma_0^2 \sin^2 A}{(\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) c^4} \frac{1}{\mathcal{N}_0^2 \sigma_0^2} [(\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A)(\mathcal{N}_0 c^4 G_\mu - M_0^2 c^4 U_\mu)] \\ &= U_\mu \left[\frac{M_0^2 \sin^2 A}{\mathcal{N}_0^2} - \frac{M_0^2 c^4}{\mathcal{N}_0^2} (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) \frac{\sin^2 A}{(\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) c^4} \right] \\ &\quad + G_\mu \left[-\frac{\sin^2 A}{\mathcal{N}_0} + \frac{\sin^2 A}{(\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) c^4 \mathcal{N}_0^2} (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) \mathcal{N}_0 c^4 \right]. \end{aligned}$$

Les deux composantes s'annulent séparément. On a donc bien $\dot{Z}_\mu = 0$. Il est facile de voir que Z_μ est dans l'espace du système d'inertie, et

que, dans cet espace, la position du point fixe C est donnée par le vecteur

$$(III-82) \quad Z_k = \frac{\sigma_k \sin A}{\mathcal{N}_0 c} + \frac{\Gamma_k \mathcal{N}_0^2 \sigma_0^2 \sin^2 A}{M_0^2 (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) c^4}$$

où

$$\Gamma_k = \frac{dV_k}{dt} = \frac{\mathcal{N}_0^2}{M_0^2} \dot{U}_k$$

représente l'accélération dans le système d'inertie.

On vérifie facilement sur cette expression que Z_k est orthogonal à la vitesse V_k et perpendiculaire à l'accélération Γ_k et que le vecteur $R_k - Z_k$ qui est le rayon du cercle parcouru par le centre de matière, est bien colinéaire à l'accélération.

On peut chercher à retrouver des expressions de la vitesse analogues à celles que nous avons obtenues dans le cas de Weyssenhoff, en considérant des vecteurs constants colinéaires à Z_k .

Si nous posons, par analogie à (32)

$$\mathbf{V} = \frac{\mathcal{N}_0}{M_0^2 c^2} \alpha \times \Gamma$$

en prenant α sur l'axe $\mathbf{Z}$ orthogonal à $\mathbf{V}$ et Γ , on devra avoir en module :

$$V_0 = \frac{\mathcal{N}_0}{M_0^2 c^2} \alpha_0 \Gamma_0$$

ou, en utilisant (76) et (70) :

$$\frac{c}{\mathcal{N}_0} \sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2} = \frac{\mathcal{N}_0}{M_0^2 c^2} \frac{M_0^2 c^3}{\mathcal{N}_0^3 \sigma_0} \sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2} \sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A} \cdot \alpha_0$$

d'où :

$$\alpha_0 = \frac{\mathcal{N}_0 \sigma_0}{\sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}$$

ce qui fournit, en tenant compte de la valeur (79) de Z_0 :

$$\alpha_k = \frac{c \mathcal{N}_0}{\sin A \cos A} Z_k$$

ou, en définissant un vecteur d'univers :

$$\alpha_\mu = \frac{c \mathcal{N}_0}{\sin A \cos A} Z_\mu = \frac{\sigma_\mu}{\cos A} + \frac{\mathcal{N}_0 \sigma_0^2 \sin A}{c^3 (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A) \cos A} \dot{U}_\mu.$$

Ce vecteur est évidemment constant, comme Z_μ . Il joue dans le cas présent le rôle qui, dans le cas de Weyssenhoff, était dévolu au spin, avec lequel il se confond si on fait $A = 0$.

On peut également former sur le même axe un vecteur vitesse angu-

laire en posant, par analogie à (32') : $\mathbf{V} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}$ étant le rayon du cercle.

On doit ainsi avoir : $\nu_0 = r_0 \omega_0$ soit d'après (78) :

$$\frac{c}{\mathcal{N}_0} \sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A} = \frac{\mathcal{N}_0 \sigma_0}{M_0^2 c} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2}{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}} \cdot \omega_0$$

d'où

$$\omega_0 = \frac{M_0^2 c_0 \sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}{\mathcal{N}_0^2 \sigma_0}.$$

On peut ainsi définir un vecteur vitesse angulaire dans le système d'inertie, vecteur constant colinéaire à $\mathbf{Z}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{M_0^2 c^3 (\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A)}{\mathcal{N}_0^2 \sigma_0^2 \sin A \cos A} \mathbf{Z}.$$

Le module ω de ce vecteur est naturellement égal à la valeur (77) de la vitesse angulaire.

Il nous reste à étudier la disposition et le mouvement du spin, ainsi que du balourd t_μ qui lui est colinéaire et qui détermine la position du centre de masse. Nous savons que le spin est un vecteur d'espace du système d'inertie. L'équation (80) montre que les trois vecteurs $\Gamma_k R_k$ et Z_k , auxquels il faut ajouter, d'après (82) le vecteur σ_k , sont dans un même plan, qui tourne autour de Z_k avec la vitesse angulaire ω en accompagnant le centre de matière. Il est facile de voir que le spin fait avec Z_k un angle constant que nous appellerons λ . On a :

$$\cos \lambda = \frac{\sigma_k Z_k}{\sigma_0 Z_0}.$$

La formule (81) montre, puisque $Z_\mu \dot{U}_\mu = 0$, que $Z_0^2 = Z_\mu Z_\mu = \frac{Z_\mu \sigma_\mu \sin A}{\mathcal{N}_0 c}$.

$$\text{D'où : } \frac{Z_k \sigma_k}{Z_0} = \frac{Z_\mu \sigma_\mu}{Z_0} = \frac{\mathcal{N}_0 c Z_0}{\sin A}.$$

D'où enfin :

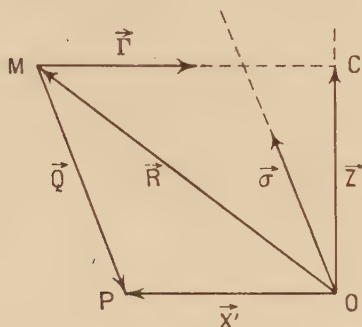
$$\frac{Z_k \sigma_k}{Z_0 \sigma_0} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\mathcal{N}_0 c}{\sin A} \frac{\sigma_0 \sin A \cos A}{c \sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}$$

soit

$$\cos \lambda = \frac{\mathcal{N}_0 \cos A}{\sqrt{\mathcal{N}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}.$$

Le spin décrit donc, avec la vitesse angulaire ω , un cône d'axe $\mathbf{Z}$. Si on considère que le spin caractérise la rotation *propre* de la goutte, on voit que dans le système d'inertie, l'axe de rotation propre subira une précession très intimement liée à la rotation *orbitale* du centre de matière puisqu'elle l'accompagne exactement, lui étant à la fois paral-

lèle et synchrone, un peu comme c'est le cas pour la rotation propre de la lune. Il est du reste facile de voir que le cône décrit par le spin est à l'intérieur de celui décrit par le rayon vecteur. Il suffit de calculer, à partir des cosinus : $\frac{Z_k R_k}{Z_0 R_0}$ et $\frac{\sigma_k R_k}{\sigma_0 R_0}$, les deux autres angles fixant la posi-



tion respective des trois vecteurs σR et Z . On voit que σ est obligatoirement entre R et Z .

Le balourd est également dans l'espace d'inertie, où il vaut :

$$t_k = \sigma_k \sin A.$$

De même le vecteur Q_k joignant le centre de matière M au centre de masse P , lequel se trouve donc aussi dans l'espace d'inertie. On a

$$Q_k = -\frac{t_k}{\mathcal{M}_0 c}.$$

Si nous cherchons à localiser le centre de masse relativement au centre de gravité fixe O , on doit calculer le vecteur

$$X_k = R_k + Q_k = R_k - \frac{\sigma_k \sin A}{\mathcal{M}_0 c}.$$

Mais si nous considérons la formule (71), elle donne dans le système d'inertie :

$$R_k = \frac{\sigma_k \sin A}{\mathcal{M}_0 c} - \frac{\sigma_0^2 \mathcal{M}_0^2}{M_0^2 c^4 M_0^2} \Gamma_k$$

et on voit que R est déjà décomposé en un vecteur $-Q$ et un vecteur

$$X_k = -\frac{\sigma_0^2 \mathcal{M}_0^2}{M_0^2 c^4} \Gamma_k.$$

On voit donc que le centre de masse décrit un mouvement circulaire en même temps que le centre de matière, mais *dans le plan même du centre de gravité*.

Le rayon du cercle est : $X_0 = \frac{\sigma_0 \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2} \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}{M_0^2 \mathcal{M}_0 c}$. On se souvient que, dans le cas de Weyssenhoff, le centre de masse, confondu avec le centre de matière, décrivait précisément un mouvement circulaire centré sur le centre de gravité, mais dont le rayon $\frac{\sigma_0 \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2}}{M_0^2 c}$ est plus grand que X_0 .

Dans un cas comme dans l'autre, on aura évidemment reconnu dans le plan fixe où s'effectue le mouvement circulaire du centre de masse, le *disque de Möller*, lieu géométrique des pseudocentres de masse, au repos dans le système d'inertie. Il est alors évident que l'axe fixe $\mathbf{Z}$ de l'espace d'inertie autour duquel s'exécute tout le mouvement, n'est autre que le spin de Möller, orthogonal au plan du disque.

Ainsi lorsqu'on considère un angle A nul, on a un mouvement de Weyssenhoff. Dans le référentiel d'inertie, le spin, vecteur invariable, est sur l'axe de rotation orbitale $\mathbf{Z}$. Le centre de matière et le centre de masse confondus tournent dans le plan Π du centre de gravité sur un cercle de rayon $\frac{\sigma_0 \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2}}{M_0^2 c}$ à la vitesse angulaire :

$$\omega_1 = \frac{M_0^2 c^2}{\sigma_0 \mathcal{M}_0}$$

Si l'angle A est au contraire différent de zéro, le spin se détache de l'axe $\mathbf{Z}$ et exécute un mouvement de précession autour de lui. Le centre de masse reste dans le plan Π , mais le rayon de son orbite devient plus faible. Le centre de matière se sépare du centre de masse, sort du plan Π et décrit un mouvement circulaire parallèle et coaxial au précédent, mais de rayon supérieur. Relativement au rayon $\mathcal{R}_0$ du mouvement de Weyssenhoff, les rayons des orbites du centre de matière et du centre de masse ont pour valeurs :

$$r_0 = \frac{\mathcal{M}_0 \sigma_0 \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2}}{M_0^2 c \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}} = \mathcal{R}_0 \frac{\mathcal{M}_0}{\sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}$$

$$X_0 = \frac{\sigma_0 \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2} \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}{\mathcal{M}_0 M_0^2 c} = \mathcal{R}_0 \frac{\sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}{\mathcal{M}_0}$$

si bien qu'on a $r_0 X_0 = \mathcal{R}_0^2$.

Enfin, le spin et les deux centres tournent en bloc dans un même plan passant par l'axe $\mathbf{Z}$ et du même côté de cet axe, avec une vitesse angulaire

$$\omega = \frac{M_0^2 c^2 \sqrt{\mathcal{M}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}{\mathcal{M}_0^2 \sigma_0}$$

égale à $\omega = \omega_1 \frac{\sqrt{\mathfrak{M}_0^2 - M_0^2 \sin^2 A}}{\mathfrak{M}_0}$ et par conséquent plus petite que la vitesse ω_1 du mouvement de Weyssenhoff. Naturellement cette comparaison n'a de sens que si les conditions initiales sont les mêmes. Plus précisément on a supposé que les mouvements correspondent à une même valeur du spin σ_0 et à une même valeur de la masse d'inertie $\mathfrak{M}_0$.

Comme celle-ci est donnée par $\mathfrak{M}_0 = \frac{M_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$ ceci revient à prendre une même valeur pour la vitesse du *centre de matière*. Cette hypothèse se traduit par le fait que l'expression de cette vitesse, soit $r_0\omega$, est bien indépendante de l'angle A d'après les formules (77) et (78).

CHAPITRE IV

THÉORIE GÉNÉRALE DES MODÈLES HYDRODYNAMIQUES

§ 1 Vitesse locale et densité de matière.

Avant d'aborder la constitution de fluides à structure moléculaire au moyen des corpuscules tournants que nous venons d'étudier, nous allons consacrer le présent chapitre à l'étude des fluides représentatifs que l'on peut constituer en partant des fonctions d'ondes de la mécanique quantique, ou plus généralement des fonctions d'ondes quelconques sur la base desquelles a été édifiée la théorie classique des champs. Nous montrons dans notre appendice C comment, à partir d'une fonction d'onde de nature quelconque dont l'équation d'onde dérive d'un formalisme lagrangien, on peut tirer un système de tenseurs conservatifs, à savoir un vecteur *courant* j_μ pour lequel : $\partial_\mu j_\mu = 0$, un tenseur du deuxième ordre $t_{\mu\nu}$, le *tenseur canonique d'énergie-impulsion* pour lequel on a : $\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$, enfin, un tenseur du troisième ordre $f_{[\mu\nu]\lambda}$, le *tenseur de Belinfante*, antisymétrique en μ et ν et obéissant à l'équation : $\partial_\lambda f_{[\mu\nu]\lambda} = 0$.

Nous montrons aussi qu'on peut soumettre les deux derniers tenseurs à une transformation de jauge très générale qui laisse invariantes les deux équations fondamentales et ne modifie pas certains tenseurs globaux intégrés sur l'ensemble du champ, si bien qu'on peut considérer que les tenseurs transformés représentent aussi bien la fonction d'onde que les tenseurs $t_{\mu\nu}$ et $f_{\mu\nu\lambda}$, quitte à disposer par la suite de l'indétermination par un choix convenable de la jauge.

Nous allons partir de ce formalisme tensoriel et montrer qu'on peut, dans tous les cas, en tirer des variables qui constituent un modèle hydrodynamique car elles obéissent à des relations générales qu'on peut interpréter comme des équations dynamiques fondamentales.

Partons du courant j_μ dont nous rappelons l'expression :

$$(IV-1) \quad j_\mu = i(\psi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^r_\mu} - \dot{\psi}^{r*} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{r*}_\mu})$$

et donnons-lui la forme habituelle d'un courant fluide dans l'hydrodynamique relativiste. Si on appelle ρ la *densité de matière* (nombre de « molécules » par unité de volume *propre*) et u_μ la *vitesse unitaire* locale du fluide, pour laquelle on a : $u_\mu u_\mu = -c^2$ on pose :

$$j_\mu = \hbar \rho u_\mu$$

La constante de Planck intervient comme facteur de dimension. En effet, dans le formalisme de la mécanique quantique, les lagrangiens ont toujours les dimensions d'une énergie. Pour que u_μ ait celles d'une vitesse, on voit facilement qu'il faut diviser le courant par un facteur ayant les dimensions d'une action. C'est une simple question de commodité car il est bien certain que la signification du formalisme hydrodynamique ne sera pas affectée par un facteur qu'on peut supposer porter sur la densité ρ . On a ainsi : $j_\mu \dot{j}_\mu = -\hbar^2 \rho^2 c^2$ ce qui fournit immédiatement l'expression des deux quantités hydrodynamiques :

$$\rho = \frac{1}{c\hbar} \sqrt{-j_\mu \dot{j}_\mu} \quad \text{et} \quad u_\mu = \frac{1}{\rho \hbar} j_\mu.$$

Comme j_μ peut être remplacé par son expression (1), on voit que la densité de matière et la vitesse unitaire peuvent être exprimées univoquement en fonction de l'onde ψ .

La signification de l'équation de conservation : $\partial_\mu \dot{j}_\mu = 0$ est immédiate.

Si on l'écrit : $\partial_\mu (\rho u_\mu) = 0$ on voit que le premier membre représente la dérivée $\dot{\rho}$ de la quantité ρ le long d'une ligne de courant (appendice A) et on voit que la densité invariante de matière se conserve au cours du temps lorsqu'on suit un même élément de fluide au cours de son mouvement. Si on applique la méthode générale de notre appendice A, on considérera une gouttelette infinitésimale de fluide, de volume propre V_0 . La quantité de matière qu'elle contient s'exprime par :

$$Q = \int_{V_0} \rho d\nu_0.$$

La gouttelette évoluant entre un instant t_1 et un instant t_2 et balayant ainsi une portion de tube de courant Ω , on sait qu'on a alors :

$$\int_\Omega \dot{\rho} d\omega = Q_2 - Q_1 \quad \text{et comme ici : } \dot{\rho} = 0, \quad \text{on voit que : } Q_1 = Q_2.$$

La conservation du courant signifie que la quantité de matière de la gouttelette se conserve au cours du mouvement; en aucun point du fluide, il ne peut y avoir création ou annihilation de matière.

La détermination de la vitesse unitaire va nous permettre d'analyser les tenseurs $t_{\mu\nu}$ et $f_{\mu\nu\lambda}$ et de les décomposer en grandeurs hydrodynamiques, et ensuite de suivre, comme nous venons de le faire, une goutte de fluide au cours de son mouvement et de préciser ainsi les lois régissant les grandeurs hydrodynamiques obtenues.

§ 2. Décomposition du tenseur d'énergie-impulsion.

Commençons par le tenseur $t_{\mu\nu}$:

$$t_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{,\nu}} \psi_{,\mu} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

On décompose alors le tenseur $t_{\mu\nu}$ en composantes colinéaires et orthogonales au courant suivant une méthode déjà indiquée (chap. 1). Il vient :

$$t_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu - p_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \theta_{\mu\nu}$$

avec :

$$p_\mu u_\mu = 0 \quad q_\mu u_\mu = 0 \quad \theta_{\mu\nu} u_\nu = \theta_{\mu\nu} u_\mu = 0.$$

Les coefficients du développement sont faciles à calculer en fonction de $t_{\mu\nu}$ et de u_μ (et par conséquent des fonctions d'onde ψ). On contracte par $u_\mu u_\nu$. Il vient :

$$t_{\mu\nu} u_\mu u_\nu = \mu_0 c^4$$

d'où le scalaire μ_0 qu'on appelle *densité de masse propre*, nous verrons tout à l'heure pourquoi. Si on contracte seulement par u_μ , ou par u_ν , on trouve respectivement : $t_{\mu\nu} u_\nu = -c^2 \mu_0 u_\mu + c^2 p_\mu$

$$\text{d'où :} \quad p_\mu = \mu_0 u_\mu + \frac{1}{c^2} t_{\mu\nu} u_\nu$$

$$\text{et :} \quad t_{\mu\nu} u_\mu = -c^2 \mu_0 u_\nu - c^2 q_\nu$$

$$\text{d'où :} \quad q_\nu = -\mu_0 u_\nu - \frac{1}{c^2} t_{\mu\nu} u_\mu$$

Il reste enfin :

$$\theta_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} - \mu_0 u_\mu u_\nu + p_\mu u_\nu - q_\nu u_\mu$$

Dans la décomposition de $t_{\mu\nu}$, on reconnaît deux termes classiques (Appendice B) : $\mu_0 u_\mu u_\nu$, qui est l'expression de la partie dynamique du tenseur classique d'énergie-impulsion (d'où l'interprétation de μ_0),

et le tenseur d'espace propre $\theta_{\mu\nu}$ qui fournit le tenseur des tensions internes. Mais il faut remarquer, d'une part, que μ_0 ne peut en général se mettre sous la forme classique ρm_0 , parce qu'on n'a pas : $\dot{\mu}_0 = 0$, d'autre part, que la densité de force déduite du tenseur $\theta_{\mu\nu}$: $\varphi_\mu = -\partial_\nu \theta_{\mu\nu}$, n'est pas en général contenue dans l'espace propre. Examinons ce point.

On a, par hypothèse :

$$\theta_{\mu\nu} u_\mu = 0$$

d'où :

$$\partial_\nu (\theta_{\mu\nu} u_\mu) = 0$$

et non pas :

$$\varphi_\mu u_\mu = 0$$

ce qui exigerait :

$$u_\mu \partial_\nu \theta_{\mu\nu} = 0$$

Décomposons φ_μ en une composante suivant le courant que nous écrivons $\frac{\omega_0}{c^2} u_\mu$, et une composante d'espace propre f_μ :

$$\varphi_\mu = \frac{\omega_0}{c^2} u_\mu + f_\mu \quad \text{avec} \quad f_\nu u_\nu = 0.$$

Ces deux quantités se calculent immédiatement en contractant par u_μ :

$$\varphi_\mu u_\mu = -\omega_0 \quad f_\mu = \varphi_\mu - \frac{\omega_0}{c^2} u_\mu.$$

f_μ joue, comme nous le verrons tout de suite, le rôle classique de la *densité de force* exercée par les tensions internes. Elle provient de ce que l'action des tensions internes sur un petit parallélépipède (dans le système propre, par exemple) est plus forte sur une face que sur la face opposée. On peut, d'autre part, expliciter l'expression de ω_0 :

$$\omega_0 = -\varphi_\mu u_\mu = -\partial_\nu \theta_{\mu\nu} u_\mu = -\partial_\nu (\theta_{\mu\nu} u_\mu) + \theta_{\mu\nu} \partial_\nu u_\mu.$$

Le premier terme est nul et il reste :

(IV-2)

$$\omega_0 = \theta_{\mu\nu} \partial_\nu u_\mu$$

Pour interpréter physiquement cette quantité, plaçons-nous dans le système propre, où $\theta_{\mu\nu}$ ne possède que des composantes d'espace. On a ainsi :

$$\omega_0 = \theta_{ij}^0 (\partial_i u_j)^0 \quad \text{soit} \quad \omega^0 = \theta_{ij}^0 (\partial_i v_j)^0.$$

Comme on doit ici tenir compte des variations locales de la vitesse, le modèle de la goutte infinitésimale, dont toutes les parties ont sensiblement la même vitesse, qui nous a servi notamment dans l'appendice A,

n'est plus suffisant ici. On doit considérer un point C déterminé de la goutte décrivant une ligne d'univers $\mathcal{L}$ avec la vitesse U_μ et rapporter la goutte au système propre *de ce point* C. La quantité étudiée met ainsi en jeu la vitesse des autres parties de la goutte relativement aux axes entraînés par le point C. Ceci dit, plaçons-nous d'abord dans le cas simple où le tenseur des tensions (rapporté au système propre) a toutes ses composantes rectangles nulles et ses composantes carrées égales : $\theta_{ij}^0 = p^0 \delta_{ij}$.

Nous serons ainsi dans le cas du *fluide parfait* et p^0 représentera la pression. L'équation (2) devient : $\omega_0 = p^0 (\partial_i \nu_i)^0$. Pour l'interpréter, il suffit de l'intégrer dans le système propre sur le volume d'une gouttelette :

$$\int_{V_0} \omega_0 dV_0 = \int_{V_0} p^0 (\partial_i \nu_i)^0 dV_0 = p^0 \int_{V_0} (\partial_i \nu_i)^0 dV_0$$

en négligeant les variations de la pression à l'échelle de la gouttelette.

Enfin :

$$\int_{V_0} \omega_0 dV_0 = p^0 \int_{\Sigma_0} \nu_i^0 d\sigma_i^0 = p^0 \frac{\delta V_0}{\delta \tau},$$

l'intégrale multipliée par un élément de temps propre $\delta \tau$, représentant évidemment l'accroissement de volume de la gouttelette. L'expression calculée représente donc le travail des forces de pression (par unité de temps) causé par une dilatation ou une contraction de la gouttelette.

Dans le cas général, il vient se superposer à l'effet précédent un autre effet lié aux composantes rectangles des tensions. Ces composantes nous donneront :

$$\theta_{ik}^0 \int_{V_0} (\partial_k \nu_i)^0 dV_0$$

avec :

$$i \neq k$$

soit :

$$\theta_{ik}^0 \int_{\Sigma_0} \nu_i^0 d\sigma_k^0.$$

Il s'agit, cette fois, du travail des tensions internes lié aux composantes de la vitesse tangentes à la surface de la gouttelette. Cet effet met en jeu les différences de vitesses des couches fluides qui glissent les unes sur les autres, par exemple la rotation de la goutte dans le système d'axes entraînés avec le point C, rotation qui occasionne un frottement de la surface de la goutte sur le fluide environnant. Dans ce cas, il y a production de travail parce que l'existence de composantes rectangles de θ_{ij}^0 , revient à supposer le *fluide visqueux*, sans que, bien

entendu, nous puissions nous attendre à trouver des lois de viscosité reproduisant les lois très particulières qu'on trouve dans les fluides matériels (Appendice B).

On peut résumer les résultats de cette discussion en considérant que les tensions d'espace propre que nous ont fournies notre décomposition s'appliquent globalement à une gouttelette. Les tensions fourniront sur la gouttelette deux genres tout à fait différents de travail. D'une part, le travail de la force f_μ (intégrée sur le *volume* de la gouttelette); celle-ci se comportera comme une force externe appliquée à un point matériel. Son travail aura pour unique effet l'accroissement de l'énergie cinétique de la gouttelette. D'autre part, le travail w_0 dû aux effets de dilatation et de viscosité. Ce dernier est lié au fait que la gouttelette *n'est pas* un point matériel, mais possède essentiellement une certaine extension. Le travail w_0 ne se traduit par aucun effet mécanique global sur la gouttelette. S'il est positif, il accroît son énergie sous une forme non mécanique, qu'on ne peut exprimer en fonction des paramètres introduits. On est amené nécessairement à introduire une énergie spécifique supplémentaire qui, naturellement, possède une masse, mais qui ne s'exprime pas en fonction du mouvement du fluide. Cette énergie, nous l'appellerons la *chaleur*, suivant en cela une suggestion de M. Takabayasi ⁽²⁴⁾, et étant bien entendu qu'on ne doit associer à ce mot aucune des images usuelles relatives à l'agitation thermique, à l'entropie, et plus généralement à la structure statistique du fluide. La quantité w_0 sera ainsi appelée *densité d'énergie calorifique propre*.

Pour interpréter les autres grandeurs constituant $t_{\mu\nu}$, écrivons explicitement la relation de conservation :

$$\partial_\nu(\mu_0 u_\mu u_\nu - p_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \theta_{\mu\nu}) = 0.$$

Les deux premiers termes contenant u_ν , la divergence a la forme de la dérivée le long d'une ligne de courant (Appendice A) que nous désignons par $\frac{d}{d\tau}$ ou par un point. Quant à $\partial_\nu \theta_{\mu\nu}$, nous l'explicitons :

$$\frac{d}{d\tau}(\mu_0 u_\mu - p_\mu) + \partial_\nu(q_\nu u_\mu) - \frac{w_0}{c^2} u_\mu - f_\mu = 0.$$

Les deux termes extrêmes ont la forme que l'on trouve dans la formule classique d'Euler, ce qui nous amène à considérer le vecteur $\mu_0 u_\mu - p_\mu$ comme représentant une *densité d'impulsion* généralisée g_μ . On remarque que celle-ci se compose d'un terme classique $\mu_0 u_\mu$ colinéaire à la vitesse, et d'un terme $-p_\mu$ qui est dans l'espace propre et que nous nommerons

densité d'impulsion transversale (voir chap. III). On a ainsi :

$$g_{\mu} = -\frac{1}{c^2} t_{\mu\nu} u_{\nu}$$

L'équation devient alors :

$$(IV-3) \quad \dot{g}_{\mu} + \partial_{\nu}(q_{\nu} u_{\mu}) - \frac{w_0}{c^2} u_{\mu} = f_{\mu}.$$

Si nous la contractons par u_{μ} , il vient, en se souvenant que : $f_{\mu} u_{\mu} = 0$

$$\dot{g}_{\mu} u_{\mu} + u_{\mu} \partial_{\nu}(q_{\nu} u_{\mu}) + w_0 = 0, \text{ c'est à dire : } \\ \frac{d}{d\tau}(g_{\mu} u_{\mu}) - g_{\mu} \dot{u}_{\mu} + \partial_{\nu}(-c^2 q_{\nu}) - q_{\nu} u_{\mu} \partial_{\nu} u_{\mu} + w_0 = 0.$$

Or, on sait que : $g_{\mu} u_{\mu} = -\mu_0 c^2$ et $u_{\mu} u_{\mu} = -c^2$ d'où : $u_{\mu} \partial_{\nu} u_{\mu} = 0$
enfin : $g_{\mu} \dot{u}_{\mu} = -p_{\mu} \dot{u}_{\mu} = \dot{p}_{\mu} u_{\mu}.$

On a donc finalement :

$$\dot{\mu}_0 c^2 + \dot{p}_{\mu} u_{\mu} = w_0 - c^2 \partial_{\nu} q_{\nu}$$

Cette relation nous fournit évidemment le bilan de l'énergie « propre ». Au premier membre nous reconnaissons la variation de la densité de masse propre, et un terme qui paraît difficile à interpréter car on n'a pas en général : $\dot{p}_{\mu} u_{\mu} = 0$ ou : $p_{\mu} \dot{u}_{\mu} = 0$.

Au second membre, nous retrouvons l'énergie calorifique créée par le travail des tensions internes. Mais le dernier terme nous fait prévoir que cette énergie calorifique ne reste pas localisée au point où elle a été produite, et que sa migration est représentée par le vecteur q_{ν} que nous appellerons avec Tabakayasi ⁽²⁴⁾, *densité de courant de chaleur*. Son rôle va se préciser tout de suite.

Considérons maintenant l'équation (3) et intégrons-la sur une portion de tube balayée par une gouttelette dans le temps $d\tau$.

On sait (Appendice A) qu'en considérant l'impulsion totale de la gouttelette :

$$G_{\mu} = \int_{V_0} g_{\mu} dV_0$$

l'intégrale $\int_{\Omega} \dot{g}_{\mu} d\omega$ devient $\dot{G}_{\mu} d\tau$. De même $\int_{\Omega} f_{\mu} d\omega$ peut s'écrire :
 $d\tau \int_{V_0} f_{\mu} dV_0 = d\tau F_{\mu},$

F_{μ} étant la force totale exercée par les forces de tensions.

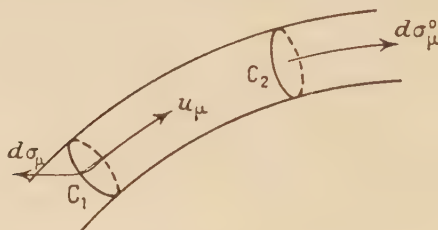
L'intégrale $\int_{\Omega} \partial_{\nu}(q_{\nu} u_{\mu}) d\omega$ devient $\int_{\Sigma} q_{\nu} u_{\mu} d\sigma_{\nu}$, intégrale à prendre sur

toute l'hypersurface limitant la portion de tube. Sur les deux cloisons d'espace propre C_1 et C_2 les intégrales sont nulles puisque q , est dans l'espace propre, soit : $q^0 d\sigma^0 = 0$.

Sur la paroi, au contraire, on doit exprimer :

$$d\sigma_\lambda = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\varphi\lambda} dx_\mu^{(1)} dx_\nu^{(2)} dx_\varphi^{(3)},$$

les trois éléments infinitésimaux $dx_\mu^{(1)} dx_\nu^{(2)} dx_\varphi^{(3)}$ étant pris sur l'hyper-



paroi. On peut en choisir un, par exemple $dx_\mu^{(3)}$, le long du courant et calculer le produit $q d\sigma$, dans le système propre. On a alors :

$$\begin{aligned} dx_i^{(3)} &= 0 & dx_\mu^{(3)} &= ic d\tau & d\sigma_\mu^{(3)} &= 0 \\ d\sigma_k^0 &= \frac{i}{c} \varepsilon_{ijkl} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} ic d\tau. \end{aligned}$$

Ou, en posant par convention : $\varepsilon_{ijkl} = \varepsilon_{ijk}$, $d\sigma_k^0 = \varepsilon_{ijk} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} d\tau$.

On obtient ainsi simplement l'élément d'aire ordinaire ds_k^0 sur la surface de la gouttelette, dans l'espace propre. Ainsi nous obtenons l'intégrale : $d\tau \int_{S_0} u_\mu q_k^0 ds_k^0$ qui, si on peut négliger les variations de u_μ à l'échelle de la gouttelette, fournit : $d\tau U_\mu \int_{S_0} q_k^0 ds_k^0 = d\tau U_\mu \Phi_0$ en appelant Φ_0 le *flux de chaleur*, ou flux du vecteur courant de chaleur, sortant de la goutte dans l'espace propre. L'équation intégrée sur la goutte donne donc :

$$(IV-4) \quad G_\mu - U_\mu \left(\int_{V_0} \frac{w_0}{c^2} dV_0 - \int_{S_0} q_k^0 ds_k^0 \right) = F_\mu$$

On voit que l'impulsion totale de la gouttelette subit deux genres de variation tout à faits différents : d'une part, la variation dynamique mesurée par la force F_μ , comme c'est le cas pour le point matériel classique. D'autre part, une variation « thermodynamique » due au fait qu'une partie de l'énergie contenue dans la goutte est constituée par de la chaleur. Celle-ci peut s'accroître par suite du travail des tensions

internes, et décroître par suite d'un processus particulier de « conductibilité ». C'est seulement la différence entre la variation totale $\dot{G}_\mu$ de l'impulsion, et l'impulsion supplémentaire apportée par la chaleur, qui intervient dans la loi de la dynamique.

Ainsi se trouve justifiée l'interprétation que nous avons donnée aux deux quantités $\theta_{\mu\nu}, \delta, u_\mu$ et q , qui ne peuvent, croyons-nous, s'interpréter de manière purement dynamique.

§ 3. Décomposition du moment de rotation propre.

Nous allons maintenant utiliser les projections sur le courant pour analyser le tenseur densité de moment de rotation propre de Belinfante, dont nous rappelons l'expression au moyen de l'opérateur des rotations infinitésimales :

$$f_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_{,\lambda}^{rs}} \mathcal{L}_{[\mu\nu]}^{rs} \psi^s \quad (\text{Appendice C}).$$

On obtient une décomposition covariante, compte tenu de l'antisymétrie :

$$f_{[\mu\nu]\lambda} = A_{[\mu\nu]\lambda} + B_{\mu\lambda} u_\nu - B_{\nu\lambda} u_\mu + M_{[\mu\nu]} u_\lambda + c (T_\mu u_\nu - T_\nu u_\mu) u_\lambda.$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu\lambda} u_\mu &= A_{\mu\nu\lambda} u_\nu = A_{\mu\nu\lambda} u_\lambda = 0 \\ B_{\mu\nu} u_\mu &= B_{\mu\nu} u_\nu = 0 \\ M_{\mu\nu} u_\mu &= M_{\mu\nu} u_\nu = 0 \quad T_\mu u_\mu = 0. \end{aligned}$$

Cette décomposition reste très complexe, et M. Takabayasi propose de la simplifier en profitant de l'indétermination de la jauge. Il met pour cela en avant l'idée physique que la notion abstraite de « moment de rotation propre » dans l'hydrodynamique étudiée doit correspondre à l'existence de rotations intrinsèques, en ce qui concerne les *particules* élémentaires dont le fluide peut être considéré comme composé. Parmi les tenseurs dans lesquels se résout $f_{[\mu\nu]\lambda}$, un seul peut convenir pour représenter convenablement la rotation intrinsèque d'un corpuscule tournant. C'est le tenseur antisymétrique d'espace propre $M_{[\mu\nu]}$, que M. Takabayasi assimile à un moment angulaire propre. Mais nous avons rencontré, dans l'analyse du corpuscule tournant, des mouvements de rotation intrinsèque plus généraux représentés par un tenseur antisymétrique $S_{[\mu\nu]}$ qui n'est plus obligatoirement dans l'espace propre. Si nous voulons tenir compte de la possibilité de tels mouvements pour les éléments de notre fluide, nous voyons qu'il faut considérer non seulement le terme $M_{[\mu\nu]} u_\lambda$, mais le terme $c(T_\mu u_\nu - T_\nu u_\mu) u_\lambda$, c'est-à-dire l'ensemble des termes contenant u_λ en facteur. Nous sommes donc

amenés à la décomposition suivante :

$$(IV-5) \quad f_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} s_{[\mu\nu]} u_{\lambda} + {}^+f_{[\mu\nu]\lambda}$$

avec :

$${}^+f_{\mu\nu\lambda} u_{\lambda} = 0.$$

Le tenseur $\frac{1}{2} s_{[\mu\nu]}$ se décompose à son tour en une partie d'espace propre, $M_{[\mu\nu]}$ qu'on peut, comme Takabayasi, interpréter comme étant dû au moment giratoire des particules, et une partie orthogonale à l'espace propre $c(T_{\mu}u_{\nu} - T_{\nu}u_{\mu})$ qui est due, si elle existe, à une séparation dans chaque particule entre le centre de masse et le centre de matière. Quant au reste du tenseur, il ne paraît pas possible de lui donner une interprétation physique. Aussi est-il légitime de le faire disparaître en choisissant une jauge convenable, ce qui, comme nous le savons, laisse invariable, non seulement la validité des équations fondamentales de conservation, mais également la valeur de l'impulsion totale $\mathcal{G}_{\mu}$ et du moment angulaire total $\Gamma_{\mu\nu}$ intégrés sur l'ensemble du champ. On fera ainsi la transformation :

$$f'_{\mu\nu\lambda} = f_{\mu\nu\lambda} - {}^+f_{\mu\nu\lambda}$$

que doit accompagner naturellement la transformation :

$$t'_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} - \partial_{\lambda} \Phi_{\mu\nu\lambda}$$

avec :

$$\Phi_{\mu\nu\lambda} = {}^+f_{\mu\nu\lambda} - {}^+f_{\mu\lambda\nu} - {}^+f_{\nu\lambda\mu}.$$

Cette transformation modifiera, bien entendu, toutes les grandeurs dynamiques que nous avons tirées de $t_{\mu\nu}$, mais non les équations qui les lient, ni, par conséquent, leur interprétation hydrodynamique. Comme, d'autre part, $s_{\mu\nu}$ et ${}^+f_{\mu\nu\lambda}$ sont parfaitement déterminés en fonction de $f_{\mu\nu\lambda}$, et, par conséquent de la fonction d'onde, par les relations tirées de (5) contracté par u_{λ} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} s_{\mu\nu} &= -\frac{1}{c^2} f_{\mu\nu\lambda} u_{\lambda} \\ {}^+f_{\mu\nu\lambda} &= f_{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{2} s_{\mu\nu} u_{\lambda}, \end{aligned}$$

on voit que tout le formalisme continue à dépendre de façon parfaitement univoque de la fonction d'onde.

Moyennant cette transformation de jauge, on a pour le tenseur $f_{\mu\nu\lambda}$ l'expression simplifiée (on supprime les signes') :

$$\boxed{f_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} s_{\mu\nu} u_{\lambda}}$$

Il nous reste à justifier l'interprétation dynamique qui nous fait désigner $s_{\mu\nu}$ comme une densité de moment angulaire propre. L'équation de conservation pour les moments nous donne :

$$t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu} = 2\partial_\lambda f_{\mu\nu\lambda} = \partial_\lambda (s_{\mu\nu} u_\lambda) = \dot{s}_{\mu\nu}$$

en introduisant la dérivée de long d'une ligne de courant pour la densité $s_{\mu\nu}$ (Appendice A).

On peut, d'autre part, expliciter $t_{\mu\nu}$ en fonction des grandeurs dynamiques :

$$t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu} \equiv \mu_0 u_\mu u_\nu - p_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \theta_{\mu\nu} - \mu_0 u_\nu u_\mu + p_\nu u_\mu - q_\mu u_\nu - \theta_{\nu\mu} \\ \equiv (q_\nu + p_\nu) u_\mu - (q_\mu + p_\mu) u_\nu + 2\theta_{\mu\nu} = \dot{s}_{\mu\nu}$$

On fait ainsi apparaître un vecteur densité d'impulsion transversale généralisée :

$$p'_\mu = p_\mu + q_\mu$$

qui permet de donner à l'équation la forme condensée :

$$p'_\mu u_\nu - p'_\nu u_\mu + 2\theta_{\mu\nu} = \dot{s}_{\mu\nu}$$

qui fournit une généralisation de l'équation de Frenkel-Weyssenhoff

Pour utiliser le procédé habituel d'intégration sur un élément de tube, il est préférable de conserver la forme initiale :

$$g_\mu u_\nu - g_\nu u_\mu + q_\nu u_\mu - q_\mu u_\nu + 2\theta_{\mu\nu} = \dot{s}_{\mu\nu}.$$

En intégrant, le deuxième membre nous donne $\dot{S}_{\mu\nu} d\tau$. Pour chaque terme du premier membre, on décompose l'élément d'univers en $dV_0 d\tau$ et on intègre sur le volume propre en supposant celui-ci assez petit pour que la vitesse y varie peu et puisse sortir de l'intégrale. On a alors :

$$G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu + U_\mu \int_{V_0} q_\nu dV_0 - U_\nu \int_{V_0} q_\mu dV_0 + 2 \int_{V_0} \theta_{\mu\nu} dV_0 = \dot{S}_{\mu\nu}.$$

On peut, avec le vecteur densité de courant de chaleur q_μ , constituer un vecteur *courant total de chaleur* :

$$Q_\mu = \int_{V_0} q_\mu dV_0.$$

C'est un vecteur d'espace propre représentant une quantité de même nature que l'impulsion G_μ . Enfin $\theta_{\mu\nu}$ a les dimensions d'une densité de couple puisque $\partial_\lambda \theta_{\mu\nu}$ a celle d'une densité de force. On peut donc définir un *couple total* :

$$N_{[\mu\nu]} = 2 \int_{V_0} \theta_{\mu\nu} dV_0.$$

On peut finalement écrire l'équation sur la gouttelette :

$$(IV-6) \quad (G_\mu - Q_\mu) U_\nu - (G_\nu - Q_\nu) U_\mu + N_{[\mu\nu]} = \dot{S}_{\mu\nu}$$

On voit que cette équation exprime le théorème classique du moment cinétique pour la gouttelette. La variation du moment angulaire total se compose, comme nous l'avons trouvé toutes les fois que nous avons eu affaire à un corpuscule tournant relativiste, d'un terme orbital $U_\mu G_\nu - U_\nu G_\mu$ exprimant la « courbure » du mouvement global de la gouttelette et d'un terme supplémentaire $\dot{S}_{[\mu\nu]}$ provenant de l'existence d'un moment angulaire « propre » et justifiant ainsi notre interprétation de $s_{\mu\nu}$ comme densité de moment angulaire propre. Cette variation est égale, d'autre part, à la quantité $N_{[\mu\nu]}$ qui, comme intégrale de la partie antisymétrique du tenseur des tensions internes, a évidemment le rôle d'un couple de torsion.

Il reste à interpréter l'intervention de la chaleur. On voit qu'ici elle se présente sous la forme du courant de chaleur :

$$Q_\mu = \int_{V_0} q_\mu dV_0$$

alors que dans l'équation des forces apparaissait la quantité :

$$A_0 = \int_{V_0} \frac{w_0}{c^2} dV_0 - \int_{S_0} q_\mu^0 ds_\mu^0.$$

Dans les deux cas, l'impulsion totale G_μ exprime le mouvement de la totalité de l'énergie, y compris l'énergie calorifique. Dans l'équation (4), ce qui est en jeu c'est la *variation* de l'impulsion dans le temps $d\tau$. Celle-ci est composée d'une partie dynamique due à la variation de la vitesse sous l'action de la force, et d'une partie non dynamique due à la variation de la masse propre pendant le temps $d\tau$, variation résultant de la création de chaleur par le travail des tensions internes et de la perte ou de l'acquisition de chaleur par conductibilité. Cette seconde partie de la variation de l'impulsion n'a aucune cause dynamique, elle ne dépend pas de la force extérieure, laquelle n'agit que sur la partie dynamique. Pour obtenir cette dernière, on doit donc *retrancher* de la variation totale $\dot{G}_\mu$ la variation non-dynamique, soit $A_0 U_\mu$. Dans l'équation des couples, au contraire, on a affaire à l'expression $G_\nu U_\mu - G_\mu U_\nu$, qui représente la variation du moment angulaire orbital de *toute* l'énergie, y compris la chaleur. Or celle-ci exécute un double déplacement : d'une part, liée à la matière et accroissant par là son inertie, elle est entraînée avec le courant et contribue par là au moment dynamique de rotation

au même titre que la masse proprement dite, dont elle n'est d'ailleurs pas discernable; d'autre part, elle subit, à l'intérieur du courant de matière, une « migration » thermique sans cause dynamique, d'où va résulter un moment angulaire apparent qui ne doit pas entrer en ligne de compte dans l'équation des couples et que, pour cette raison, on doit *retrancher* du moment angulaire orbital total pour qu'il n'en reste que la partie dynamique, laquelle prend ainsi la forme :

$$(G_v U_\mu - G_\mu U_v) - (Q_v U_\mu - Q_\mu U_v).$$

C'est pour la même raison que nous avons été amené à écrire l'équation pour la densité de moment :

$$p'_\mu u_\mu - p'_\mu u_v + 2\underset{\sim}{\theta}_{\mu v} = \dot{s}_{\mu v}$$

en introduisant une impulsion transversale généralisée : $p'_\mu = p_\mu + q_\mu$ qui est dans l'espace propre. Si on contracte par u_μ il vient :

$$(IV-7) \quad p'_v \equiv p_v + q_v = \frac{1}{c^2} \dot{s}_{\mu v} u_\mu.$$

Cette relation montre, entre autres, que si le fluide ne possède pas de moment angulaire propre, on a : $p_v + q_v = 0$.

On remarque ainsi que l'existence d'une impulsion transversale (ou le fait que l'impulsion g_μ n'est pas colinéaire au courant) n'est pas forcément l'indice d'un moment angulaire propre. Elle résulte également de l'existence d'un courant de chaleur et il peut être utile de la décomposer en ces deux termes, ce qui donne pour l'impulsion :

$$g_v = \mu_0 u_v + q_v - \frac{1}{c^2} \dot{s}_{\mu v} u_\mu.$$

Comme nous l'avons fait pour les grandeurs corpusculaires dans notre chapitre III, nous pouvons décomposer de façon covariante le moment angulaire $s_{\mu v}$ en deux vecteurs d'univers :

$$s_\mu = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\mu} u_\nu s_{\alpha\beta} \text{ ou densité de giration}$$

et : $t_\mu = \frac{1}{c} s_{\mu\nu} u_\nu$ ou densité de balourd :

$$\text{et l'on a : } s_{\mu\nu} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha s_\beta + \frac{1}{c} (u_\mu t_\nu - u_\nu t_\mu)$$

On peut exprimer la dérivée $\dot{s}_{\mu\nu}$ qui intervient dans l'équation des couples :

$$\dot{s}_{\mu\nu} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (u_\alpha \dot{s}_\beta + \dot{u}_\alpha s_\beta) + \frac{1}{c} (u_\mu \dot{t}_\nu - u_\nu \dot{t}_\mu + \dot{u}_\mu t_\nu - \dot{u}_\nu t_\mu)$$

L'équation (7) devient alors :

$$P'_\mu = \frac{i}{c^3} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu \dot{u}_\alpha s_\beta + \frac{1}{c} \dot{t}_\mu + \frac{i u_\nu}{c^3} u_\mu$$

ce qui fournit, en contractant respectivement par $\dot{u}_\mu$ et s_μ les deux égalités :

$$p'_\mu \dot{u}_\mu = \frac{1}{c} \dot{t}_\mu \dot{u}_\mu$$

$$p'_\mu s_\mu = \frac{1}{c} \dot{t}_\mu s_\mu.$$

Autrement dit, le vecteur d'univers :

$$p'_\mu - \frac{1}{c} \dot{t}_\mu = p_\mu + q_\mu - \frac{1}{c} \dot{t}_\mu$$

est orthogonal à la fois à $\dot{u}_\mu$ et à s_μ .

Il est naturellement de même du vecteur $g_\mu + q_\mu - \frac{1}{c} \dot{t}_\mu$.

§ 4. Autre décomposition proposée par M. Takabayasi.

Il est à noter que M. Takabayasi ⁽²⁴⁾ utilise également une autre décomposition du tenseur $f_{\mu\nu\lambda}$ (équivalente à celle que nous avons proposée antérieurement ^(25, 26, 27)). Disons pourquoi elle ne nous paraît pas physiquement satisfaisante. On fait apparaître la partie complètement antisymétrique du produit $s_{[\mu\nu]} u_\lambda$ défini comme précédemment. Il est facile de voir, en tenant compte de l'antisymétrie de $s_{\mu\nu}$ que le tenseur :

$$c\sigma_{[\mu\nu\lambda]} = s_{[\mu\nu]} u_\lambda + s_{[\nu\lambda]} u_\mu + s_{[\lambda\mu]} u_\nu$$

est complètement antisymétrique, (il est à remarquer que, dans cette opération, la partie de $s_{\mu\nu}$ non située dans l'espace propre disparaît et qu'on a aussi bien :

$$\frac{1}{2} c\sigma_{[\mu\nu\lambda]} = M_{\mu\nu} u_\lambda + M_{\nu\lambda} u_\mu + M_{\lambda\mu} u_\nu,$$

qui est, du reste, l'expression considérée par Takabayasi). On peut alors attribuer la signification du *spin* à $\sigma_{[\mu\nu\lambda]}$ ou à son dual σ_α , avec les relations :

$$\sigma_\alpha = \frac{i}{6} \varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda} \sigma_{\mu\nu\lambda} \quad \sigma_{[\mu\nu\lambda]} = i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \sigma_\alpha.$$

On effectue alors une transformation de jauge différente de celle proposée précédemment. La décomposition de : $f_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} s_{\mu\nu} u_\lambda + {}^+f_{\mu\nu\lambda}$

devient : $f_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} c \sigma_{[\mu\nu\lambda]} - \frac{1}{2} s_{\nu\lambda} u_\mu - \frac{1}{2} s_{\lambda\mu} u_\nu + f_{\mu\nu\lambda}$ et on prendra comme jauge la quantité :

$$++f_{\mu\nu\lambda} = +f_{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{2} s_{\lambda\nu} u_\mu - \frac{1}{2} s_{\lambda\mu} u_\nu$$

de façon que l'on ait simplement :

$$f_{\mu\nu\lambda} = \frac{c}{2} \sigma_{[\mu\nu\lambda]} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} c \sigma_\alpha$$

Dans ces conditions, l'équation des couples devient :

$$p'_\mu u_\mu - p'_\mu u_\nu + 2\theta_{\mu\nu} = ic\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} d\lambda \sigma_\alpha$$

L'intervention de la rotation intrinsèque sous la forme du dual du rotationnel du spin est correcte dans le cas de l'équation de Dirac, et effectivement la représentation hydrodynamique qui résulte, pour le cas de Dirac, de la transformation de jauge envisagée, correspond exactement à l'hydrodynamique du fluide de Dirac obtenue par Takabayasi d'une manière très naturelle ⁽⁹⁾. Mais, dans le cas général, on rencontre de graves difficultés d'interprétation si on intègre l'équation sur un élément de tube : au premier membre, on trouve la même expression que tout à l'heure, avec la même interprétation :

$$[(G_\mu - Q_\mu)U_\nu - (G_\nu - Q_\nu)U_\mu + N_{[\mu\nu]}]d\tau.$$

Pour raisonner sur le second membre, plaçons-nous (comme Takabayasi) dans le cas où : $s_{\mu\nu} u_\nu = 0$.

On a alors (voir chap. III) : $s_{\mu\nu} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \sigma_\beta$

Nous avons à calculer l'intégrale :

$$\int_\Omega ic\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} d\lambda \sigma_\alpha d\omega = \int_\Sigma ic\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \sigma_\alpha d\alpha_\lambda$$

étendue à l'ensemble de l'hypersurface limitant l'élément de tube (nous désignons l'élément d'hypersurface par α_λ pour éviter la confusion avec le spin). Sur les cloisons C_1 et C_2 d'espace propre, on a : $d\alpha_\lambda = -\frac{u_\lambda}{c^2} dV_0$ et : $d\alpha_\lambda = +\frac{u_\lambda}{c^2} dV_0$ respectivement.

D'où la contribution : $-\int_{C_1} \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \sigma_\alpha u_\lambda dV_0 + \int_{C_2} \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \sigma_\alpha u_\lambda dV_0$
soit : $d\tau \frac{d}{d\tau} \int_{V_0} \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \sigma_\alpha u_\lambda dV_0$
ce qui n'est autre que : $d\tau \frac{d}{d\tau} \int_{V_0} s_{\mu\nu} dV_0 = d\tau \dot{S}_{\mu\nu}$

On retrouve donc bien le terme correct de l'équation de Frenkel-Weyssenhoff. Mais il y a encore un terme d'hyperparoi. Nous avons vu que sur l'hyperparoi on pouvait, en se plaçant dans le système propre, exprimer $d\alpha_k^0$ par l'élément de surface d'espace propre ds_k^0 : $d\alpha_k^0 = ds_k^0 d\tau$ d'où l'intégrale : $I_{[\mu\nu]} = ic \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \int_{S_0} \sigma_\alpha^0 d\alpha_\lambda^0$.

Les composantes d'espace pur I_{ij}^0 sont nulles car leur intégrant contient en facteur soit σ_i^0 , soit $d\alpha_i^0$ qui sont nuls. Restent les composantes :

$$I_{i4}^0 = d\tau \frac{ic}{2} \varepsilon_{i4jk} \int_{S_0} (\sigma_k^0 ds_j^0 - \sigma_j^0 ds_k^0) = d\tau \frac{ic}{2} \int_{S_0} \varepsilon_{ijk} (\sigma_k^0 ds_j^0 - \sigma_j^0 ds_k^0)$$

Or on sait (chap. III) que, dans l'espace propre, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_i^0 &= \varepsilon_{ijk} s_{jk}^0 \\ \text{d'où :} \quad s_{jk}^0 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma^0 \end{aligned}$$

On a donc :

$$I_{i4}^0 = d\tau \frac{ic}{2} \int_{S_0} \left(\frac{1}{2} s_{ij}^0 ds_j^0 - \frac{1}{2} s_{ki}^0 ds_k^0 \right) = d\tau \frac{ic}{2} \int_{S_0} s_{ij}^0 ds_j^0$$

On voit apparaître ainsi le flux du moment angulaire propre qu'il convient de transformer en intégrale de volume :

$$I_{i4}^0 = d\tau \frac{ic}{2} \int_{V_0} \partial_j^0 s_{ij}^0 dV_0$$

Si on remarque que : $ic = U_i^0$ on peut donner à I_{i4}^0 la forme antisymétrique :

$$I_{[ik]}^0 = \frac{1}{2} d\tau \left(U_k^0 \int_{V_0} \partial_j^0 s_{ij}^0 dV_0 - U_i^0 \int_{V_0} \partial_j^0 s_{kj}^0 dV_0 \right)$$

le deuxième terme étant nul, ou même :

$$I_{[ik]}^0 = \frac{1}{2} d\tau \left(\bar{U}_k^0 \int_{V_0} \partial_\lambda^0 s_{i\lambda}^0 dV_0 - U_i^0 \int_{V_0} \partial_\lambda^0 s_k^0 dV_0 \right)$$

ce qui revient encore à ajouter des termes nuls $\partial_i^0 s_{ik}^0$ (rappelons que, dans le système propre, les composantes s_{ik}^0 sont nulles). On voit alors qu'avec cette forme pour $I_{[ik]}^0$ et $I_{[4i]}^0$, et toutes les composantes d'espace :

$$I_{[jk]}^0 = \frac{1}{2} d\tau \left(U_k^0 \int_{V_0} \partial_\lambda^0 s_{j\lambda}^0 dV_0 - U_j^0 \int_{V_0} \partial_\lambda^0 s_k^0 dV_0 \right)$$

qui sont nulles comme les U_k^0 , on forme un tenseur dont toutes les

composantes dans le système propre sont identiques à celles du tenseur covariant :

$$I_{[\mu\nu]} = -\frac{1}{2} d\tau \left(U_\mu \int_{V_0} \partial_\lambda s_{\nu\lambda} dV_0 - U_\nu \int_{V_0} \partial_\lambda s_{\mu\lambda} dV_0 \right)$$

ou, si on pose : $D_\mu = \frac{1}{2} \int_{V_0} \partial_\lambda s_{\mu\lambda} dV_0$:

$$I_{\mu\nu} = -d\tau (U_\mu D_\nu - U_\nu D_\mu).$$

D'où l'équation sur la goutte :

$$\dot{S}_{\mu\nu} = (G_\mu - Q_\mu) U_\nu - (G_\nu - Q_\nu) U_\mu + N_{\mu\nu} + (U_\mu D_\nu - U_\nu D_\mu).$$

Il faut bien souligner que la quantité D_μ est uniquement fonction de la distribution de la densité de moment angulaire propre au sein de la goutte.

Si nous voulons tenter d'interpréter cette relation, nous pouvons remarquer qu'en faisant tendre les tensions internes vers zéro (ce qui oblige presque à supprimer aussi le courant de chaleur, puisqu'il n'y aura plus de production d'énergie spécifiquement calorifique), on doit dans tous les cas aboutir à la suppression de toute espèce d'action subie par une goutte de la part du reste du fluide, et trouver les équations du mouvement d'une goutte libre isolée. On aura ici :

$$\dot{S}_{\mu\nu} = G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu + U_\mu D_\nu - U_\nu D_\mu.$$

Or, dans toute l'étude que nous avons faite précédemment des gouttes libres en rotation, nous n'avons jamais trouvé de terme autre que $\dot{S}_{\mu\nu}$ où puisse intervenir le moment angulaire propre. Aussi sommes-nous fondés à regarder avec méfiance une hydrodynamique qui nous fournit de tels termes dans le cas « matière pure ». Naturellement, il peut arriver que certaines fonctions d'ondes particulières nous fournissent, en raison de la forme du lagrangien, des tensions internes déterminées, au moins en partie, par le moment angulaire propre, comme c'est effectivement le cas pour le fluide de Takabayasi représentant la fonction d'onde de Dirac. Dans ce cas, le terme en D_μ peut entrer dans le couple $N_{\mu\nu}$. Mais il s'agit là d'un cas particulier alors que nous cherchons ici une méthode générale applicable à toute fonction d'onde. Tout au plus pourrait-on admettre de se restreindre à une classe particulière de modèles hydrodynamiques pour lesquels, en l'absence d'une partie antisymétrique du tenseur des tensions, le moment angulaire propre serait à flux conservatif. Alors le vecteur D_μ s'annulerait en même temps que le couple $N_{\mu\nu}$ et nous retrouverions, dans le cas « matière pure », l'équation ordinaire du corpuscule tournant libre.

§ 5. Classification des modèles hydrodynamiques.

Les considérations précédentes nous fournissent les cadres d'une classification logique des modèles hydrodynamiques. On peut distinguer tout d'abord les fluides dotés de moment angulaire interne et ceux qui en sont dépourvus.

Les premiers peuvent se caractériser, d'une part, par les propriétés mêmes du moment angulaire interne. A côté du cas le plus général pour lequel nous avons les deux équations fondamentales :

$$\begin{aligned} \dot{g}_{\mu} + \partial_{\nu}(q_{\nu}u_{\mu}) &= -\partial_{\nu}\theta_{\mu\nu} \equiv f_{\mu} + \frac{\omega_0}{c^2} u_{\mu} \\ (g_{\mu} - q_{\mu})u_{\nu} - (g_{\nu} - q_{\nu})u_{\mu} + 2\theta_{\mu\nu} &= \dot{s}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

auxquelles il faut adjoindre la relation de décomposition de $s_{\mu\nu}$

$$s_{\mu\nu} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} u_{\alpha} s_{\lambda} + \frac{1}{c} (u_{\mu} t_{\nu} - u_{\nu} t_{\mu})$$

nous pouvons, en nous inspirant de notre chapitre III, considérer deux restrictions :

1) *Les deux vecteurs s_{μ} et t_{μ} sont colinéaires.* Ils s'expriment en fonction d'un vecteur d'espace propre unique, le *spin* σ_{μ} , et d'une variable scalaire A :

$$s_{\mu} = \sigma_{\mu} \cos A \quad t_{\mu} = \sigma_{\mu} \sin A.$$

Si on fait intervenir le moment de rotation propre : $f_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} s_{\mu\nu} u_{\lambda}$

considéré après la transformation de jauge qui a fait disparaître les autres termes, on a :

$$\begin{aligned} s_{\mu\nu} &= -\frac{2}{c^2} f_{\mu\nu\rho} u_{\rho} \\ s_{\mu} &= \frac{i}{2c} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\mu} u_{\nu} s_{\alpha\beta} = -\frac{i}{c^3} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\mu} u_{\nu} f_{\alpha\beta\rho} u_{\rho} \\ t_{\mu} &= \frac{1}{c} s_{\mu\nu} u_{\nu} = -\frac{2}{c^3} f_{\mu\nu\rho} u_{\nu} u_{\rho} \end{aligned}$$

On exprime que s_{μ} et t_{μ} sont colinéaires par la relation : $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} s_{\mu} t_{\nu} = 0$ qui annule leur produit extérieur, soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\sigma\tau\mu} u_{\lambda} s_{\sigma\tau} s_{\nu\rho} u_{\rho} &= 0. \\ \delta_{\lambda\sigma\tau}^{\alpha\beta\nu} u_{\lambda} s_{\sigma\tau} s_{\nu\rho} u_{\rho} &= 0. \end{aligned}$$

Le premier membre fournit :

$$s_{\alpha\beta} u_{\nu} s_{[\nu\rho]} u_{\rho} + s_{\beta\nu} u_{\alpha} s_{\nu\rho} u_{\rho} + s_{\nu\alpha} u_{\beta} s_{\nu\rho} u_{\rho}$$

et trois termes semblables. Le premier de ces termes est nul par antisymétrie. Il reste :

$$s_{\nu\rho}u_\rho(s_{\nu\alpha}u_\beta - s_{\nu\beta}u_\alpha) = 0$$

ou, en fonction du moment de rotation propre :

$$f_{\nu\rho\lambda}u_\rho u_\lambda (f_{\nu\alpha\beta} - f_{\nu\beta\alpha}) = 0$$

2) De façon plus restrictive, on aura le cas où *le moment angulaire est dans l'espace propre* :

$$t_\mu = 0 \quad \text{ou :} \quad s_{\mu\nu}u_\nu = 0$$

Ceci se traduit sur le moment de rotation propre par :

$$f_{\mu\nu\lambda}u_\nu u_\lambda = 0$$

cela avant même la transformation de jauge.

On sait que, dans ce cas, le moment angulaire peut être représenté de façon équivalente par le spin, vecteur d'espace propre :

$$\sigma_\mu = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\mu} u_\nu s_{\alpha\beta}$$

avec :

$$s_{\mu\nu} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \sigma_\beta.$$

L'impulsion transversale généralisée s'écrit :

$$p'_\mu = p_\mu + q_\mu = \frac{1}{c^2} \dot{s}_{\mu\nu} u_\nu = -\frac{1}{c^2} s_{\mu\nu} \dot{u}_\nu = -\frac{i}{c^3} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \sigma_\beta \dot{u}_\nu$$

et on a : $p'_\mu \dot{u}_\mu = 0$ et $p'_\mu \sigma_\mu = 0$.

Elle est orthogonale au courant, au spin et à l'accélération d'univers.

D'autres restrictions, indépendantes des précédentes, peuvent porter sur le tenseur d'énergie-impulsion. On peut supposer d'abord qu'il *n'y a pas de migration de chaleur* : $q_\mu = 0$.

On a ainsi : $t_{\mu\nu}u_\mu = -\mu_0 c^2 u_\nu$ colinéaire au courant, condition qu'on peut écrire, soit : $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} t_{\rho\nu} u_\rho u_\mu = 0$

soit : $t_{\rho\nu} u_\rho \eta_{\nu\lambda} \equiv t_{\rho\nu} u_\rho \left(\partial_{\nu\lambda} + \frac{u_\nu u_\lambda}{c^2} \right) = 0$.

Dans ces conditions, l'impulsion transversale : $p_\mu = \frac{1}{c^2} \dot{s}_{\mu\nu} u_\nu$ est due uniquement au moment angulaire. Elle est déterminée par la giration et le balourd, ou par le spin, suivant les relations que nous venons d'écrire pour la quantité : $p'_\mu = p_\mu + q_\mu$.

Les deux équations fondamentales s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\dot{g}_\mu &= -\partial_\nu \theta_{\mu\nu} \\ g_\mu u_\nu - g_\nu u_\mu + 2 \underbrace{\theta_{\mu\nu}} &= \dot{s}_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Un cas encore plus particulier est celui où il n'y a *ni migration ni production de chaleur*. En plus de la condition précédente, nous avons encore :

$$\theta_{\mu\nu} \partial_\nu u_\mu = 0$$

ce qui, dans le système propre, nous donne : $\theta_{ij}(\partial_i \nu_j)^0 = 0$.

Si nous excluons le cas où seule la condition globale est satisfaite, cas qui paraît difficile à interpréter, on devra avoir, d'une part :

$$\theta_{ij}(\partial_i \nu_j)^0 = 0 \quad \text{pour :} \quad i \neq j$$

ce qui signifie qu'il n'y a pas de viscosité. Le fluide doit être *parfait* et le tenseur non relativiste des tensions s'écrira : $\theta_{ij}^0 = \delta_{ij} p^0$.

On devra avoir, en outre : $\delta_{ij} p^0 (\partial_i \nu_j)^0 = 0$ ou : $p^0 (\partial_i \nu_i)^0 = 0$ ce qui est possible dans deux cas :

1) $(\partial_i \nu_i)^0 = 0$ *cas du fluide parfait incompressible*;

2) $p^0 = 0$, il n'y a aucune tension interne, c'est le *fluide matière pure*, ce dernier cas réalise l'hydrodynamique de Weyssenhoff lorsqu'on a, en outre : $s_{\mu\nu} u_\nu = 0$ ou sinon, les généralisations suggérées par la dynamique particulière de Bohm et Vigier.

Enfin, on peut considérer les *fluides dépourvus de moment angulaire interne*. Il n'est pas nécessaire que le tenseur de Belinfante $f_{\mu\lambda}$ soit identiquement nul.

Il suffit qu'on ait : $f_{\mu\lambda} u_\lambda = 0$ c'est-à-dire que $f_{\mu\lambda}$ se réduise à la partie que nous avons convenu d'éliminer dans tous les cas par une transformation de jauge.

De cette hypothèse, il résulte, d'une part, que le tenseur d'énergie-impulsion (après transformation de jauge) est *symétrique*, d'autre part, que : $p_\mu + q_\mu = 0$.

L'existence d'une impulsion transversale est due uniquement au courant de chaleur. Les équations fondamentales prennent la forme :

$$\begin{aligned}\dot{g}_\mu + \partial_\nu (q_\nu u_\mu) &= -\partial_\nu \theta_{\mu\nu} \\ (g_\mu - q_\mu) u_\nu - (g_\nu - q_\nu) u_\mu &= -2 \underbrace{\theta_{\mu\nu}}.\end{aligned}$$

On peut reprendre pour ce type de fluides les hypothèses que nous avons faites sur le tenseur d'énergie-impulsion.

S'il n'y a pas de courant de chaleur : $p_\mu = 0$ l'impulsion g_μ est colinéaire

au courant. La partie cinématique du tenseur d'énergie-impulsion se réduisant au terme symétrique $\mu_0 u_\mu u_\nu$, le tenseur des tensions est également symétrique et les équations fondamentales se réduisent à :

$$\begin{aligned} g_\mu &= \mu_0 u_\mu \\ \dot{g}_\mu &= -\partial_\nu \theta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Enfin, si on suppose, en outre, qu'il n'y a pas production de chaleur, on retrouve les deux cas classiques du fluide parfait incompressible, et du fluide matière pure.

Remarquons enfin que, le moment angulaire n'intervenant dans les équations du mouvement que par la dérivée $\dot{s}_{\mu\nu}$, on retrouvera les mêmes mouvements que ci-dessus, si la densité de moment angulaire propre est, non pas nulle, mais constante le long d'une ligne de courant, cas que nous avons rencontré en étudiant la goutte de Möller.

§ 6. Représentation de la fonction d'onde de Schrödinger.

Nous allons appliquer les considérations précédentes aux principales fonctions d'ondes de la mécanique quantique. Tout d'abord, nous pouvons reprendre, au moyen du formalisme général que nous venons d'exposer, la représentation hydrodynamique de l'équation de Schrödinger abordée dans notre introduction (fluide de Madelung). Bien qu'il s'agisse d'une équation non-relativiste, la transposition est immédiate.

L'équation de Schrödinger dérive, on le sait, du lagrangien non-relativiste :

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} (\dot{\psi}^* \psi - \psi^* \dot{\psi}) + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_k \psi^* \partial_k \psi + V \psi^* \psi$$

ψ^* désignant le complexe conjugué de ψ , et $\dot{\psi}$ la dérivée ordinaire par rapport au temps. En écrivant l'équation d'Euler, relative aux deux groupes de variables t et x_k , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} \right) + \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{,k}^*} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*}$$

$$\text{soit : } \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_k \partial_k \psi + V \psi = 0$$

c'est-à-dire l'équation de Schrödinger. On a une équation identique pour ψ^* .

Nous tirons facilement de ce lagrangien les composantes du courant : correspondant aux variables d'espace :

$$j_k = i \left(\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{,k}^*} - \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{,k}} \right) = \frac{i\hbar^2}{2m} (\psi \partial_k \psi^* - \psi^* \partial_k \psi)$$

et correspondant au temps :

$$j_{\otimes} = i \left(\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} \right) = \hbar \psi^* \dot{\psi}$$

cette dernière composante représentant évidemment (au facteur $\hbar$ près) la densité du fluide.

Passons aux fonctions réelles en faisant la transformation : $\psi = \text{Re } \frac{iS}{\hbar}$

Il vient pour le lagrangien :

$$\mathcal{L} = P \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial_k S \partial_k S}{2m} + V \right) + \frac{\hbar^2}{8m} \frac{\partial_k P \partial_k P}{P}$$

(en posant $R^2 = P$).

Les équations d'Euler sont alors :

$$(J) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \partial_k S \partial_k S + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R} = 0$$

$$(C) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \partial_k \left(\frac{P \partial_k S}{m} \right) = 0 \quad (\text{voir Introduction})$$

ce qui, reporté dans le lagrangien, lui donne la valeur :

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m} (R \Delta R + \partial_k R \partial_k R) = \frac{\hbar^2}{4m} \Delta P$$

Les composantes du courant sont :

$$j_k = \frac{\hbar P}{m} \partial_k S \quad j_{\otimes} = \hbar P$$

ce qui correspond à une densité de matière : $\rho = \frac{j_{\otimes}}{\hbar} = P$

et à une vitesse :

$$v_k = \frac{\partial_k S}{m}$$

conformément aux hypothèses choisies précédemment. Il résulte immédiatement de l'équation (C) que l'on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (\rho v_k) = \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Il y a conservation de la matière au cours du mouvement. On construit facilement l'ensemble des grandeurs qui constituent le tenseur d'univers énergie-impulsion, à l'approximation non relativiste. Ce sont :

1) un tenseur spatial d'énergie-impulsion :

$$t_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{,j}} \partial_i P + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_{,j}} \partial_i S - \delta_{ij} \mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial_i P \partial_j P}{P} + P \frac{\partial_i S \partial_j S}{m} - \frac{\hbar^2}{4m} \delta_{ij} P \Delta P$$

$$t_{ij} = \rho m \nu_i \nu_j + \frac{\hbar^2}{2m} [2\partial_i R \partial_j R - \delta_{ij} (R \Delta R + \partial_k R \partial_k R)]$$

C'est un tenseur symétrique.

2) un vecteur densité d'impulsion :

$$g_k \equiv t_{k\otimes} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{S}} \partial_k S = P \partial_k S$$

$$g_k = \rho m \nu_k$$

3) un vecteur densité de courant d'énergie :

$$t_{\otimes k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_{,k}} \dot{S} = P \frac{\partial_k S}{m} \dot{S} \quad \text{ou d'après (J)}$$

$$-t_{\otimes k} = \rho E \nu_k$$

4) enfin, un scalaire densité d'énergie :

$$t_{\otimes\otimes} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{S}} \dot{S} = \frac{1}{c^2} P \dot{S}$$

$$-t_{\otimes\otimes} = \rho \frac{E}{c^2}$$

L'équation relativiste de conservation : $\partial_\mu t_{\mu\nu} = 0$ se subdivise ici en :

— une équation de conservation de l'impulsion : $\partial_j t_{ij} + \frac{\partial}{\partial t} t_{i\otimes} = 0$
 soit : $\partial_j (\rho m \nu_i \nu_j) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho m \nu_i) + \partial_j \theta_{ij} = 0$ ou, en rappelant que $\rho m \nu_i$ est l'impulsion g_i et que $-\partial_j \theta_{ij} = \varphi_j$ est la densité de force de tension, il vient :

$$\frac{d}{dt} g_i = \varphi_i.$$

De même, on a une équation de conservation de l'énergie :

$$\partial_j t_{\otimes j} + \frac{\partial}{\partial t} t_{\otimes\otimes} = 0$$

soit : $-\partial_j (\rho E \nu_j) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) = -\frac{d}{dt} (\rho E) = 0.$

D'où, puisque : $\frac{d\rho}{dt} = 0$: $\frac{dE}{dt} = 0.$

L'énergie est invariable, en l'absence de force extérieure.

Ainsi, il résulte de l'équation de conservation de l'impulsion que le deuxième terme du tenseur t_{ij} représente le tenseur des tensions internes :

$$\theta'_{ij} = \frac{\hbar^2}{2m} [2\partial_i R \partial_j R - \delta_{ij} (R \Delta R + \partial_k R \partial_k R)]$$

ou encore : $\theta'_{ij} = \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial_i \rho \partial_j \rho}{\rho} - \delta_{ij} \Delta \rho \right).$

Ce tenseur, toujours symétrique, diffère cependant tout à fait de celui qu'on obtient par la méthode de Madelung (voir introduction),

soit : $\theta_{ij} = \frac{\hbar^2}{2m} (R \partial_i \partial_j R - \partial_i R \partial_j R)$

ou encore : $\theta_{ij} = \frac{\hbar^2}{4m} \rho \partial_i \partial_j \text{Log } \rho$

De même les pressions internes qu'on en tire par contraction ont une expression différente :

$$p' = \frac{1}{3} \theta'_{ii} = -\frac{\hbar^2}{6m} (3R \Delta R + \partial_i R \partial_i R)$$

$$p = \frac{1}{3} \theta_{ii} = -\frac{\hbar^2}{6m} (-R \Delta R + \partial_i R \partial_i R) \quad \text{pour Madelung.}$$

Par contre, l'expression de la densité de force, la seule quantité physique tirée du tenseur θ_{ij} qui intervienne explicitement dans les relations hydrodynamiques, est :

$$\varphi'_i = -\partial_j \theta'_{ij} = -\frac{\hbar^2}{2m} [2\partial_i \partial_j R \partial_j R + 2\partial_i R \Delta R - \partial_i R \Delta R - R \partial_i \Delta R - 2\partial_i \partial_j R \partial_j R]$$

$$\varphi'_i = \frac{\hbar^2}{2m} (R \partial_i \Delta R - \Delta R \partial_i R) = R^2 \partial_i \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R} \right)$$

ce qui est l'expression même dont nous sommes parties pour dériver les tensions de Madelung. Les deux modèles sont donc physiquement équivalents.

§ 7. Fonction d'onde de Klein-Gordon. Représentation de M. de Broglie et Takabayasi.

Passons aux fonctions d'onde relativistes. On sait qu'elles doivent toutes satisfaire à la condition de Klein-Gordon : $\partial_\mu \partial_\mu \Phi = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Phi$ et que, dans le cas d'une fonction d'onde scalaire, cette condition suffit à déterminer entièrement l'équation d'onde. Nous allons d'abord étudier ce cas, en commençant par rappeler le procédé employé par M. Louis de

Broglie (16, 42), et repris par M. Takabayasi (43), procédé qui généralise celui de Madelung.

En posant : $\Phi = \text{Re} \frac{iS}{\hbar}$ l'équation de Klein-Gordon se subdivise en :

$$(C) \quad \partial_\mu (R^2 \partial_\mu S) = 0$$

$$(J) \quad \partial_\mu S \partial_\mu S + m_0^2 c^2 - \hbar^2 \frac{\square R}{R} = 0.$$

Ici on ne peut pas poser simplement : $u_\mu = \frac{\partial_\mu S}{m_0}$ car la condition : $u_\mu u_\mu = -c^2$ ne serait pas vérifiée en général. On forme le scalaire $\partial_\mu S \partial_\mu S$ et on pose :

$$\partial_\mu S \partial_\mu S = -M_0^2 c^2$$

en introduisant un scalaire M_0 , variable en général, au lieu de la masse propre m_0 qui intervenait dans l'équation non relativiste. On peut alors poser :

$$u_\mu = \frac{\partial_\mu S}{M_0}$$

L'équation (J) devient alors :

$$-M_0^2 c^2 + m_0^2 c^2 = \hbar^2 \frac{\square R}{R}$$

D'où l'expression de M_0 :

$$M_0^2 = m_0^2 - \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\square R}{R}$$

On voit que M_0 ne diffère de m_0 que par un terme correctif à la fois quantique et relativiste. On a, du reste, approximativement :

$$M_0 \approx m_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\square R}{R}$$

ormule où on reconnaît la généralisation relativiste du potentiel quantique : $Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R}$.

Comme l'a fait remarquer M. Takabayasi, l'introduction de la quantité M_0 n'est possible qu'à condition que : $\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\square R}{R} \leq m_0^2$ relation qui peut se trouver en défaut pour les corpuscules de masse évanouissante, ou dans les régions où $\frac{\square R}{R}$ devient très grand. Notons, d'autre part, que l'équation (J) s'écrit aussi :

$$\partial_\mu S \partial_\mu S \equiv M_0 u_\mu \partial_\mu S \equiv M_0 \dot{S} = -M_0^2 c^2$$

(en introduisant la dérivée le long d'une ligne de courant) si bien que, si on veut conserver à S la signification de la fonction d'action, — $\dot{S}$ est l'énergie propre et on a :

$$M_0 \dot{S} = - M_0^2 c^2 \equiv - E_0 M_0$$

ou :

$$E_0 = M_0 c^2$$

ce qui achève de fixer la signification de M_0 qui apparaît comme une *masse propre totale*.

Prenons le gradient de l'équation (J) :

$$2\partial_\mu S \partial_\mu \partial_\nu S = \partial_\nu \left(\hbar^2 \frac{\square R}{R} \right).$$

En divisant les deux membres par $2M_0$:

$$u_\mu \partial_\mu \partial_\nu S \equiv \frac{d}{d\tau} (M_0 u_\nu) = \frac{1}{2M_0} \partial_\nu \left(\hbar^2 \frac{\square R}{R} \right) = - \frac{1}{2M_0} \partial_\nu (M_0^2 c^2) = - \partial_\nu (M_0 c^2)$$

soit :

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} (M_0 u_\nu) = - \partial_\nu (M_0 c^2)}$$

La quantité M_0 joue donc en même temps le rôle d'une masse propre variable, et celui d'un potentiel scalaire des forces relativistes correspondant au potentiel quantique de l'onde de Schrödinger.

Pour construire une représentation hydrodynamique, il faut introduire une densité de matière conservative en tenant compte de l'équation (C) :

$$\partial_\mu (R^2 \partial_\mu S) \equiv \partial_\mu (M_0 R^2 u_\mu) = 0.$$

On voit qu'on doit poser (pour des raisons d'homogénéité) : $\rho = R^2 \frac{M_0}{m_0}$ et qu'on aura : $\dot{\rho} \equiv \partial_\mu (u_\mu \rho) = 0$. (Voir Appendice A).

On écrit alors l'équation (J) sous la forme :

$$u_\mu \partial_\mu S = - M_0 c^2.$$

Multiplions-la par ρ et prenons le gradient. Le premier membre nous donne :

$$\partial_\nu (\rho u_\mu \partial_\mu S) = \rho u_\mu \partial_\nu \partial_\mu S + \partial_\mu S \partial_\nu (\rho u_\mu) = \partial_\mu (\rho u_\mu \partial_\nu S) - \partial_\nu S \partial_\mu (\rho u_\mu) + M_0 u_\mu \partial_\nu (\rho u_\mu)$$

Le second terme est nul à cause de l'équation (C). Il reste :

$$\partial_\mu (\rho M_0 u_\nu u_\mu) + M_0 u_\mu \rho \partial_\nu u_\mu + M_0 u_\mu u_\mu \partial_\nu \rho$$

Le second terme est nul puisque : $u_\mu u_\mu = - c^2$.

D'où :

$$\partial_\mu (\rho M_0 u_\nu u_\mu) - M_0 c^2 \partial_\nu \rho = - \partial_\nu (\rho M_0 c^2)$$

Ou encore :

$$\partial_\mu(\rho M_0 u_\nu u_\mu) = -\rho \partial_\nu(M_0 c^2).$$

Transformons le second membre en exprimant ρ et $M_0^2 c^2$ en fonction de R :

$$\begin{aligned} -\rho \partial_\nu(M_0 c^2) &= -R^2 \frac{M_0}{m_0} \partial_\nu(M_0 c^2) = -\frac{R^2}{2m_0} \partial_\nu(M_0^2 c^2) \\ &= \frac{R^2}{2m_0} \partial_\nu \left(\hbar^2 \frac{\square R}{R} \right) = \frac{\hbar^2}{2m_0} (R \partial_\nu \square R - \partial_\nu R \square R). \end{aligned}$$

Nous pouvons transformer la parenthèse comme nous l'avons fait dans le cas du tenseur des tensions de Madelung :

$$R \partial_\nu \partial_\mu \partial_\mu R - \partial_\nu R \partial_\mu \partial_\mu R \equiv \partial_\mu (R \partial_\nu \partial_\mu R) - \partial_\mu (\partial_\nu R \partial_\mu R)$$

L'équation s'écrit finalement :

$$\partial_\mu(\rho M_0 u_\nu u_\mu) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \partial_\mu (R \partial_\nu \partial_\mu R - \partial_\nu R \partial_\mu R).$$

Sous cette forme, elle exprime que la divergence du tenseur d'énergie-impulsion est nulle, celui-ci ayant pour expression :

$$t_{\mu\nu} = \rho M_0 u_\mu u_\nu + \frac{\hbar^2}{2m_0} (\partial_\nu R \partial_\mu R - R \partial_\nu \partial_\mu R)$$

On a encore, en remarquant que :

$$R \partial_\nu \partial_\mu R - \partial_\nu R \partial_\mu R = R^2 \partial_\nu \left(\frac{\partial_\mu R}{R} \right) = R^2 \partial_\nu \text{Log } R$$

et en introduisant la densité : $\rho = R^2 \frac{M_0}{m_0}$

$$t_{\mu\nu} = \rho M_0 u_\mu u_\nu - \rho \frac{\hbar^2}{2M_0} \partial_\mu \partial_\nu \text{Log } R$$

Il est facile de montrer, en généralisant la théorie des fluides classiques de M. Lichnerowicz, que le fluide de Klein-Gordon est un fluide holonome, et que la forme ci-dessus du tenseur d'énergie-impulsion fait directement apparaître la pseudo-masse M_0 et le tenseur des pressions :

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (\partial_\nu R \partial_\mu R - R \partial_\nu \partial_\mu R) \quad (\text{cf. Appendice B}).$$

On a, en effet :

$$-\partial_\nu \pi_{\mu\nu} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (\square R \partial_\mu R + \partial_\nu R \partial_\nu \partial_\mu R - \partial_\nu R \partial_\nu \partial_\mu R - R \partial_\mu \square R) = \frac{\hbar^2}{2m_0} R^2 \partial_\mu \left(\frac{\square R}{R} \right)$$

ou, en utilisant l'équation (J) :

$$-\partial_\nu \pi_{\mu\nu} = \frac{R^2}{2m_0} \partial_\mu (m_0^2 - M_0^2) c^2 = -R^2 \frac{M_0}{m_0} \partial_\mu M_0 c^2 = -\rho \partial_\mu M_0 c^2.$$

Ainsi, la force interne par unité de pseudo-masse est :

$$K_\mu = -c^2 \partial_\mu \text{Log } M_0.$$

Elle prend bien la forme d'un gradient et on a immédiatement, en disposant de l'indétermination sur le coefficient de l'indice :

$$F = \frac{M_0}{m_0}$$

On a ainsi une troisième interprétation de la masse variable de M. de Broglie : elle correspond à l'indice du fluide holonome, au sens de M. Lichnerowicz. L'équation (J) nous permet, du reste, d'exprimer F en fonction de la variable R :

$$F^2 = 1 - \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^2} \square R$$

soit approximativement : $F \approx 1 - \frac{\hbar^2}{2m_0^2 c^2} \square R$

On voit aussi la signification du vecteur $\frac{\partial_\mu S}{m_0}$ de l'interprétation causale. Il représente le vecteur vitesse pondérée C_μ de M. Lichnerowicz (voir Appendice B), c'est-à-dire la vitesse unitaire relative à la métrique riemannienne associée au fluide. Ce vecteur :

$$C_\mu = \frac{M_0}{m_0} u_\mu = \frac{\partial_\mu S}{m_0}$$

est un gradient, contrairement à la vitesse unitaire u_μ . Son rotationnel, qui est le tenseur tourbillon de M. Lichnerowicz, est donc nul. Ainsi le mouvement de Klein-Gordon est essentiellement *irrotationnel*.

Le vecteur C_μ permet aussi d'exprimer la compressibilité relativiste :

$$\partial_\mu C_\mu = \frac{1}{m_0} \square S$$

Le cas où le fluide de Klein-Gordon est incompressible s'exprime donc par : $\square S = 0$ autrement dit, l'onde de phase se propage avec la vitesse c ,

ce qui implique une masse propre évanouissante. On peut également remarquer qu'on a, d'après l'équation (C) :

$$\partial_\mu R \partial_\mu S = -\frac{1}{2} R \square S.$$

Le cas du fluide incompressible est donc encore caractérisé par le fait que le gradient $\partial_\mu R$ est orthogonal au gradient $\partial_\mu S$ c'est-à-dire qu'il est situé dans l'espace propre.

Reprenons le tenseur d'énergie-impulsion et remarquons que la partie que nous avons assimilée à un tenseur des pressions, soit :

$$-\rho \frac{\hbar^2}{2M_0} \partial_\mu \partial_\nu \text{Log } R$$

possède des composantes aussi bien sur u_μ que sur u_ν . Il doit être décomposé si l'on veut obtenir un tenseur des tensions internes contenu dans l'espace propre, et on fera ainsi apparaître une impulsion transversale et un courant de chaleur.

Pour calculer rapidement ces vecteurs, il est commode de remarquer ⁽⁹⁾ que la projection relative à l'indice β d'un tenseur $A_{\alpha\beta}$ sur le courant est : $A_{\alpha\nu} \left(-\frac{u_\nu u_\beta}{c^2} \right)$ tandis que la projection sur l'espace propre est :

$$A_{\alpha\nu} \left(\delta_{\nu\beta} + \frac{u_\nu u_\beta}{c^2} \right) = \eta_{\nu\beta} A_{\alpha\nu}.$$

Nous avons alors immédiatement l'impulsion g_μ en projetant $t_{\mu\nu}$ sur u_ν :

$$g_\mu u_\nu = t_{\mu\lambda} \left(-\frac{u_\lambda u_\nu}{c^2} \right) = \rho M_0 u_\mu u_\nu + \frac{\rho \hbar^2}{2M_0 c^2} u_\lambda \partial_\lambda \partial_\mu \text{Log } R \cdot u_\nu$$

$$g_\mu = \rho M_0 u_\mu + \rho \frac{\hbar^2}{2M_0 c^2} u_\lambda \partial_\lambda \partial_\mu \text{Log } R$$

On obtient l'impulsion transversale $-p_\mu$ en projetant g_μ sur l'espace propre : $-p_\mu = g_\lambda \eta_{\lambda\mu}$

$$p_\mu = -\rho \frac{\hbar^2}{2M_0 c^2} u_\sigma \partial_\sigma \partial_\lambda \text{Log } R \cdot \eta_{\lambda\mu}$$

Le courant de chaleur est, on le sait, égal à l'impulsion transversale, en l'absence de moment angulaire propre :

$$q_\nu = \rho \frac{\hbar^2}{2M_0 c^2} u_\sigma \partial_\sigma \partial_\lambda \text{Log } R \cdot \eta_{\lambda\nu}$$

La densité de masse propre μ_0 s'obtient en projetant $t_{\mu\nu}$ sur le courant pour chacun des deux indices :

$$\mu_0 u_\mu u_\nu = t_{\lambda\sigma} \left(-\frac{u_\lambda u_\mu}{c^2} \right) \left(-\frac{u_\sigma u_\nu}{c^2} \right)$$

d'où :

$$\mu_0 = \rho \left(M_0 - \frac{\hbar^2}{2M_0 c^4} u_\lambda u_\sigma \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R} \right)$$

Enfin le tenseur des tensions d'espace propre s'obtient en projetant $t_{\mu\nu}$ sur l'espace propre pour chacun des deux indices :

$$\theta_{\mu\nu} = -\rho \frac{\hbar^2}{2M_0} \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R} \cdot \eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu}$$

De cette expression, nous pouvons tirer les deux grandeurs traduisant physiquement l'effet des tensions quantiques en formant le vecteur $-\partial_\nu \theta_{\mu\nu}$ et en le projetant sur l'espace propre et sur le courant :

$$-\partial_\nu \theta_{\mu\nu} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \eta_{\lambda\mu} \partial_\nu (\eta_{\nu\sigma} R^2 \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R}) + \frac{\hbar^2}{2m_0} R^2 \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R} \cdot \eta_{\nu\sigma} \partial_\nu \eta_{\lambda\mu}$$

Le premier terme est explicitement un vecteur d'espace propre puisqu'il comporte le facteur $\eta_{\lambda\mu}$. Pour le second terme, nous voyons que : $\partial_\nu \eta_{\lambda\mu} = \partial_\nu \left(\frac{u_\lambda u_\mu}{c^2} \right) = \frac{1}{c^2} (u_\lambda \partial_\nu u_\mu + u_\mu \partial_\nu u_\lambda)$ expression dont le premier terme est orthogonal au courant : $u_\mu \partial_\nu u_\mu = 0$ et va donc fournir une contribution à la force d'espace propre f_μ , et dont le second terme est sur le courant u_μ et va fournir l'énergie ω_0 produite par unité de temps par les tensions internes sous forme de chaleur. On a ainsi au total :

$$f_\mu = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left\{ \eta_{\lambda\mu} \partial_\nu (R^2 \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R} \cdot \eta_{\nu\sigma}) + u_\lambda \frac{\partial_\nu u_\mu}{c^2} R^2 \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R} \cdot \eta_{\nu\sigma} \right\}$$

soit :

$$f_\mu = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[u_\lambda \partial_\nu \left(\frac{R^2}{c^2} u_\mu \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R} \cdot \eta_{\nu\sigma} \right) + \partial_\nu \left(R^2 \partial_\mu \partial_\sigma \text{Log R} \cdot \eta_{\nu\sigma} \right) \right]$$

On voit que la force comporte un terme principal non relativiste $\frac{\hbar^2}{2m_0} \partial_\nu (R^2 \partial_\mu \partial_\sigma \text{Log R})$, un terme en $\frac{\hbar^2}{c^2}$ et un terme en $\frac{\hbar^2}{c^4}$. D'autre part, l'énergie ω_0 est donnée par :

$$\omega_0 = \frac{\hbar^2}{2M_0 c^4} \rho \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R} \cdot \eta_{\nu\sigma} \partial_\nu u_\lambda$$

avec une partie principale qui est du même ordre que la partie quantique de la masse propre μ_0 , soit :

$$\frac{\hbar^2}{2M_0 C^4} \rho \partial_\mu u_\lambda \cdot \partial_\nu \partial_\lambda \text{Log R}$$

Enfin, on exprime également la pression interne π : $3 \pi = \theta_{\mu\mu}$.

$$\pi = -\rho \frac{\hbar^2}{6M_0} \left(\square \text{Log R} + \frac{1}{c^2} u_\lambda u_\sigma \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R} \right)$$

soit :

$$\pi = -\rho \frac{\hbar^2}{6M_0} \eta_{\lambda\sigma} \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R}$$

On pourrait effectuer ces diverses opérations en tenant compte éventuellement de la relation de conservation : $\partial_\mu (M_0 R^2 u_\mu) = 0$.

Bornons-nous à quelques remarques :

1) la masse propre variable M_0 de M. de Broglie diffère, comme on le sait, de la masse propre constante m_0 , d'une quantité $-\frac{\hbar^2}{2m_0 c^2} \square \frac{R}{R}$, quantité qui est du deuxième ordre, aussi bien au point de vue quantique qu'au point de vue relativiste. C'est cette masse qui intervient seule dans la décomposition de M. Takabayasi. Le terme que nous avons été amenés à lui ajouter, soit :

$$-\frac{\hbar^2}{2M_0 c^4} u_\lambda u_\sigma \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R}$$

est beaucoup plus petit, car il est du quatrième ordre au point de vue relativiste.

2) en étudiant le corpuscule de Weyssenhoff, nous avons été amenés à définir une autre masse propre M'_0 par la relation : $\frac{g_\mu}{\rho} \frac{g_\mu}{\rho} = -M_0'^2 c^2$. L'expression trouvée pour g_μ nous donne :

$$-M_0'^2 c^2 = \left(M_0 u_\mu + \frac{\hbar^2}{2M_0 c^2} u_\lambda \partial_\lambda \partial_\mu \text{Log R} \right)^2$$

soit :

$$M_0'^2 \neq M_0^2 - \frac{2\hbar^2}{2M_0 c^4} M_0 u_\mu u_\nu \partial_\mu \partial_\nu \text{Log R}$$

en négligeant le terme en $\frac{\hbar^4}{c^6}$, ce qui donne, à la même approximation :

$M'_0 \neq M_0 - \frac{\hbar^2}{2M_0 c^4} u_\mu u_\lambda \partial_\mu \partial_\lambda \text{Log R}$ c'est-à-dire la même expression que celle que nous avons tirée de $\frac{g_\mu}{\rho} \cdot u_\mu$.

On se souvient que, dans le cas de Weyssenhoff, la différence des deux masses était donnée par :

$$M'_0 - M_0 = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2 s_0^2}{M_0 c^3}$$

où s_0 est le module du spin, soit, après quantification, $\frac{\hbar}{2}$. La différence entre les deux masses est en $\frac{\hbar^2}{c^6}$, alors que dans le cas de Klein-Gordon, elle est en $\frac{\hbar^4}{c^6}$. On voit qu'elle est considérablement plus petite, en raison évidemment de l'absence de moment angulaire propre.

3) De façon générale, la différence entre la masse d'impulsion et la masse d'inertie est due au fait que l'impulsion n'est pas colinéaire au courant. La grandeur de cette différence est liée à celle de l'impulsion transversale. Or, dans le cas de Weyssenhoff, l'impulsion transversale a pour module $\frac{s_0 \gamma_0}{c^2}$. Elle est essentiellement liée au spin et son ordre de grandeur est $\frac{\hbar}{c^2}$. Dans le cas présent, au contraire, l'impulsion transversale est due au courant de chaleur. Elle est en $\frac{\hbar^2}{c^2}$. Les phénomènes dont il est tenu compte dans notre décomposition (et qui n'apparaissent pas dans la décomposition de M. Takabayasi) sont donc beaucoup plus faibles que ceux que nous mettons en évidence dans les fluides dotés de moments angulaire interne.

4) Enfin, le tenseur des tensions comporte un terme principal quantique, mais non relativiste, soit :

$$-\rho \frac{\hbar^2}{2M_0} \partial_\lambda \partial_\sigma \text{Log R} \cdot \delta_{\lambda\mu} \delta_{\sigma\nu} = -\rho \frac{\hbar^2}{2M_0} \partial_\mu \partial_\nu \text{Log R}$$

qui est celui de la décomposition de M. Takabayasi, et deux termes nouveaux, l'un en $\frac{\hbar^2}{c^2}$, l'autre, beaucoup plus petit, en $\frac{\hbar^2}{c^4}$. Ces deux termes disparaissent évidemment à l'approximation non-relativiste.

§ 8. Fonction d'onde de Klein-Gordon. — Autre représentation et approximation non-relativiste.

La décomposition du tenseur d'énergie-impulsion sur le courant et sur l'espace propre a été conduite jusqu'à présent sous une forme covariante. Il est évident cependant que nos expressions vont prendre

une forme beaucoup plus simple si nous rapportons les tenseurs aux axes propres eux-mêmes. On posera alors :

$$u_k^0 = 0 \quad u_4^0 = ic.$$

Les dérivées de u_μ s'obtiennent facilement (voir Appendice B) :

$$(\partial_j u_k)^0 = (\partial_j v_k)^0 \quad (\partial_4 u_k)^0 = \frac{1}{ic} \frac{\partial^0}{\partial t} v_k^0 \quad (\partial_j u_4)^0 = (\partial_4 u_4)^0 = 0$$

La relation de continuité : $\partial_\mu (M_0 R^2 u_\mu) = 0$ se met alors sous la forme : $2 \frac{\partial^0}{\partial t} \text{Log } R + \frac{\partial^0}{\partial t} \text{Log } M_0 + (\partial_k v_k)^0 = 0$.

Et les tenseurs caractérisant le fluide deviennent :

$$t_{jk}^0 = -\rho \frac{\hbar^2}{2M_0} \partial_j^0 \partial_k^0 \text{Log } R$$

$$t_{j4}^0 = t_{4j}^0 = \frac{i}{c} \rho \frac{\hbar^2}{2M_0} \partial_j^0 \frac{\partial^0}{\partial t} \text{Log } R$$

$$t_{44}^0 = -\rho c^2 M_0$$

$$\mu_0 = \rho M_0 - \rho \frac{\hbar^2}{2M_0 c^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^0 \text{Log } R$$

$$-p^0 = q^0 = \rho \frac{\hbar^2}{2M_0 c^2} \frac{\partial^0}{\partial t} (\nabla \text{Log } R)$$

$$\theta_{jk}^0 = -\rho \frac{\hbar^2}{2M_0} \partial_j^0 \partial_k^0 \text{Log } R$$

$$\varphi_k^0 = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left\{ \partial_j^0 \left[R^2 \left(\partial_k^0 \partial_j^0 \text{Log } R + \frac{u_j^0}{c^2} \partial_k^0 \frac{\partial^0}{\partial t} \text{Log } R + \frac{u_k^0}{c^2} \partial_j^0 \frac{\partial^0}{\partial t} \text{Log } R \right) \right] + \frac{\partial^0}{\partial t} \left(R^2 \frac{u_j^0}{c^2} \partial_k^0 \partial_j^0 \text{Log } R \right) \right\}$$

soit :

$$\varphi_k^0 = f_k^0 = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left\{ \partial_j^0 (R^2 \partial_k^0 \partial_j^0 \text{Log } R) + \frac{R^2}{c^2} \left[\partial_k^0 \frac{\partial^0}{\partial t} \text{Log } R (\partial_j v_j)^0 + \partial_j^0 \frac{\partial^0}{\partial t} \text{Log } R (\partial_j v_k)^0 + \partial_k^0 \partial_j^0 \text{Log } R \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} \right)^0 \right] \right\}$$

enfin :

$$w_0 = \frac{\hbar^2}{2M_0 c^4} \rho \partial_i^0 \partial_j^0 \text{Log } R (\partial_j v_i)^0$$

et :

$$\pi = -\rho \frac{\hbar^2}{6M_0} \left(\square^0 \text{Log } R + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^0 \text{Log } R \right) \equiv -\rho \frac{\hbar^2}{6M_0} \Delta^0 \text{Log } R$$

Pour confronter ces résultats avec la représentation hydrodynamique de l'équation de Schrödinger, faisons l'approximation non relativiste. Pour cela, il faut retrancher à l'énergie relativiste l'énergie propre $m_0 c^2$ qui n'intervient pas en physique non-relativiste. Cela revient à retrans-

cher $m_0 c^2$ à la dérivée $-\dot{S}$, ou encore à prendre comme fonction d'action : $S' = S + m_0 c^2 t$, d'où :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S'}{\partial t} - m_0 c^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 S'}{\partial t^2}.$$

On projette alors les équations de Klein-Gordon sur des axes d'espace et de temps et on néglige les termes en $\frac{1}{c^2}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \partial_\mu S \partial_\mu S &= (\nabla S')^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} - m_0 c^2 \right)^2 = (\nabla S')^2 + 2m_0 \frac{\partial S'}{\partial t} - m_0^2 c^2 \\ \square S &= \Delta S' \quad \square R = \Delta R \quad \partial_\mu R \partial_\mu S = \partial_t R \partial_t S' + m_0 \frac{\partial R}{\partial t} \end{aligned}$$

Et les équations (J) et (C) de Klein-Gordon donnent :

$$\begin{aligned} \nabla S' + 2m_0 \frac{\partial S'}{\partial t} - \hbar^2 \frac{\Delta R}{R} &= 0 \\ 2R \left(\partial_i R \partial_i S' + m_0 \frac{\partial R}{\partial t} \right) + R^2 \Delta S' &\equiv \partial_t (R^2 \partial_t S') + m_0 \frac{\partial R^2}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

soit les équations (J) et (S) de Schrödinger. La masse propre variable de M. de Broglie est donnée par :

$$-M_0^2 c^2 \equiv \partial_\mu S \partial_\mu S = (\nabla S')^2 + 2m_0 \frac{\partial S'}{\partial t} - m_0^2 c^2$$

soit, d'après l'équation (J) : $-M_0^2 c^2 = -m_0^2 c^2 + \hbar^2 \frac{\Delta R}{R}$.

La différence des deux masses est donnée par :

$$m_0^2 - M_0^2 = \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\Delta R}{R} \quad M_0 \neq m_0 \left(1 - \frac{\hbar^2}{2m_0^2 c^2} \frac{\Delta R}{R} \right)$$

La différence doit être négligée à l'approximation non relativiste. On peut ainsi confondre M_0 et m_0 et poser :

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla S'}{m_0}, \quad \rho = R^2.$$

Les composantes du tenseur d'énergie-impulsion deviennent alors :

$$t_{ij} = R^2 m_0 \nu_i \nu_j + \frac{\hbar^2}{2m_0} (\partial_i R \partial_j R - R \partial_i \partial_j R)$$

Le second terme est bien le tenseur des tensions de Madelung

$$t_{k4} \equiv g_{k4} \nu^4 = R^2 m_0 \nu_k \nu^4 + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\partial_k R \cdot \frac{1}{ic} \frac{\partial R}{\partial t} - R \partial_k \frac{\partial R}{ic \partial t} \right)$$

soit : $t_{k\otimes} \equiv g_k = R^2 m_0 v_k$, le second terme étant en $\frac{1}{c^2}$

$$t_{44} = R^2 m_0 (-c^2) + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial R}{i c \partial t} \frac{\partial R}{i c \partial t} + R \frac{\partial^2 R}{c^2 \partial t^2} \right)$$

soit :

$$t_{\otimes\otimes} \equiv -\frac{R^2 E_0}{c^2} = -R^2 m_0.$$

On retrouve donc bien toutes les caractéristiques du fluide de Madelung.

Nous allons maintenant reprendre le même problème au moyen de la méthode générale mise au point au début de ce chapitre. Nous partons du lagrangien de Klein-Gordon à une fonction d'onde scalaire complexe Φ :

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \partial_\mu \Phi^* \partial_\mu \Phi + \frac{m_0 c^2}{2} \Phi^* \Phi$$

On voit immédiatement que les équations d'Euler sont :

$$\partial_\mu \partial_\mu \Phi = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Phi, \quad \partial_\mu \partial_\mu \Phi^* = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Phi^*,$$

soit les équations de Klein-Gordon.

D'après notre formalisme général, on obtient un courant :

$$j_\mu = \frac{i\hbar^2}{2m_0} (\Phi \partial_\mu \Phi^* - \Phi^* \partial_\mu \Phi)$$

et un tenseur d'énergie-impulsion :

$$t_{\mu\nu} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\nu \Phi \partial_\mu \Phi^*) - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

La fonction d'onde étant scalaire, elle est, par définition, indifférente à une rotation des axes et il n'y a pas de moment de rotation propre.

Introduisons les champs réels R et S , le lagrangien devient :

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \partial_\lambda R \partial_\lambda R + \frac{R^2}{2m_0} (\partial_\lambda S \partial_\lambda S + m_0^2 c^2)$$

Ou, en tenant compte de l'équation (J) : $\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (\partial_\lambda R \partial_\lambda R + R \square R)$
 ce qu'il est commode d'écrire : $\mathcal{L} = \frac{\hbar^2 R^2}{2m_0} (2\partial_\lambda \text{Log } R \partial_\lambda \text{Log } R + \square \text{Log } R).$

Le courant devient : $j_\mu = \frac{i\hbar^2}{2m_0} R^2 \left(-2i \frac{\partial S}{\hbar} \right)$ soit :

$$j_\mu = \frac{\hbar}{m_0} R^2 \partial_\mu S = \rho \hbar u_\mu.$$

D'où une densité de matière : $\rho = R^2 \sqrt{\frac{\partial_\mu S \partial_\mu S}{-m_0^2 c^2}}$

ou, en posant :

$$\partial_\mu S \partial_\mu S = -M_0^2 c^2 : \quad \rho = R^2 \frac{M_0}{m_0}$$

et une vitesse unitaire : $u_\mu = \frac{\partial_\mu S}{M_0}$.

Ce sont les résultats déjà obtenus.

Le tenseur énergie-impulsion devient :

$$t_{\mu\nu} = \frac{\hbar^2}{2m_0} 2 \left(\frac{R^2}{\hbar^2} \partial_\mu S \partial_\nu S + \partial_\mu R \partial_\nu R \right) - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

ou, en introduisant ρ, M_0 et u_μ :

$$t_{\mu\nu} = \rho M_0 u_\mu u_\nu + \rho \frac{\hbar^2}{2M_0} [2\partial_\mu \text{Log } R \partial_\nu \text{Log } R - \delta_{\mu\nu} (2\partial_\lambda \text{Log } R \partial_\lambda \text{Log } R + \square \text{Log } R)]$$

On voit que le terme quantique diffère de celui du modèle de De Broglie et Takabayasi, comme c'était déjà le cas pour le fluide de Schrödinger. Cependant il joue encore le rôle du tenseur des pressions internes d'un fluide holonome correspondant à la pseudo-masse M_0 :

$$\begin{aligned} -\partial_\nu \pi_{\mu\nu} &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} [2\partial_\mu R \cdot \square R + 2\partial_\mu \partial_\nu R \cdot \partial_\nu R - 2\partial_\lambda R \cdot \partial_\mu \partial_\lambda R - \partial_\mu R \cdot \square R - R \partial_\mu \square R] \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_0} [R \partial_\mu \square R - \partial_\mu R \cdot \square R] = \frac{\hbar^2}{2m_0} R^2 \partial_\mu \left(\frac{\square R}{R} \right) \end{aligned}$$

De ce point de vue, il n'y a rien à changer à ce que nous avons dit sur le fluide de De Broglie-Takabayasi. On obtiendra le même indice : $F = \frac{M_0}{m_0}$, la même vitesse pondérée : $C_\mu = \frac{\partial_\mu S}{m_0}$, et le mouvement sera de même irrotationnel.

Par contre, la décomposition sur les axes propres fournira des grandeurs différentes. Donnons simplement les résultats : On trouve une impulsion transversale :

$$P_\mu = -\rho \frac{\hbar^2}{M_0 c^2} u_\lambda \partial_\lambda \text{Log } R \partial_\nu \text{Log } R \cdot \eta_{\mu\nu}$$

où on peut encore remplacer $u_\lambda \partial_\lambda \text{Log R}$ par $-\frac{\square S}{2M_0}$. Le courant de chaleur sera naturellement :

$$q_\mu = \rho \frac{\hbar^2}{M_0 c^3} u_\lambda \partial_\lambda \text{Log R } \partial_\nu \text{Log R } \eta_{\mu\nu}$$

La densité de masse propre sera :

$$\mu_0 = \rho M_0 + \rho \frac{\hbar^2}{2M_0 c^2} (2\partial_\mu \text{Log R } \partial_\nu \text{Log R } \eta_{\mu\nu} + \square \text{Log R})$$

Le tenseur des tensions d'espace propre sera :

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{\rho \hbar^2}{2M_0} [2\partial_\alpha \text{Log R } \partial_\beta \text{Log R } \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - (\square \text{Log R} + 2\partial_\lambda \text{Log R } \partial_\lambda \text{Log R}) \eta_{\mu\nu}]$$

Sa divergence $-\partial_\mu \theta_{\mu\nu}$ nous fournira une densité de force de tension tinterne :

$$\varphi_\mu = -\frac{\hbar^3}{2m_0} \left[u_\alpha \partial_\nu \left\{ \frac{u_\mu}{c^2} R^2 [2\partial_\alpha \text{Log R } \partial_\beta \text{Log R } \eta_{\beta\nu} - (\square \text{Log R} + 2\partial_\lambda \text{Log R } \partial_\lambda \text{Log R}) \delta_{\alpha\nu}] \right\} \right. \\ \left. + \partial_\nu \left\{ R^2 [2\partial_\mu \text{Log R } \partial_\beta \text{Log R } \eta_{\beta\nu} - (\square \text{Log R} + 2\partial_\lambda \text{Log R } \partial_\lambda \text{Log R}) \delta_{\mu\nu}] \right\} \right]$$

et une énergie calorifique produite par unité de temps :

$$w_0 = -\frac{\rho \hbar^2}{2M_0 c^4} [\partial_\alpha \text{Log R } \partial_\beta \text{Log R } \eta_{\beta\nu} - (\square \text{Log R} + 2\partial_\lambda \text{Log R } \partial_\lambda \text{Log R}) \delta_{\alpha\nu}] \partial_\nu u_\alpha$$

enfin, on en tire une pression interne :

$$\pi = \frac{\rho \hbar^3}{2M_0} \left(\frac{2}{3} \partial_\alpha \text{Log R } \partial_\beta \text{Log R } \eta_{\alpha\beta} - \square \text{Log R} - 2\partial_\lambda \text{Log R } \partial_\lambda \text{Log R} \right)$$

Comme nous l'avons déjà fait, exprimons ces grandeurs relativement aux axes propres. Les calculs donnent :

$$-p^0 = q^0 = \rho \frac{\hbar^2}{M_0 c^2} \frac{\partial^0}{\partial t} \text{Log R } \nabla^0 \text{Log R}$$

$$\mu_0 = \rho M_0 + \rho \frac{\hbar^2}{2M_0 c^2} (2\nabla^0 \text{Log R } \nabla^0 \text{Log R} + \square \text{Log R})$$

$$\theta_{jk}^0 = \rho \frac{\hbar^2}{2M_0} [2\partial_j^0 \text{Log R } \partial_k^0 \text{Log R} - \delta_{jk} (2\partial_\lambda \text{Log R } \partial_\lambda \text{Log R} + \square \text{Log R})]$$

D'où la force φ_j^0 , en posant $\frac{\rho \hbar^2}{2M_0} (2\partial_\lambda \text{Log R } \partial_\lambda \text{Log R} + \square \text{Log R}) = \mathcal{L}$:

$$\varphi_k^0 = -\frac{\hbar^2}{m_0} \left\{ \partial_k^0 R \left[\Delta^0 R + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^0 R}{\partial t} \partial_j^0 \nu_j + \partial_j^0 R \frac{\partial^0 \nu_j}{\partial t} \right) \right] + \partial_j^0 R \left(\partial_j^0 \partial_k^0 R + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^0 R}{\partial t} \partial_j^0 \nu_k \right) \right\} \\ + \partial_k^0 \mathcal{L} + \frac{1}{c^2} \mathcal{L} \frac{\partial^0 \nu_k}{\partial t}$$

et l'énergie calorifique :

$$w_0 = -\rho \frac{\hbar^2}{2M_0 c^4} (\partial_j^0 \text{Log R } \partial_k^0 \text{Log R} - \delta_{jk} \mathcal{L}).$$

On voit sous cette forme simplifiée qu'on n'obtient pas du tout les mêmes expressions que pour le fluide de De Broglie-Takabayasi.

Pour achever de préciser la différence, faisons l'approximation non-relativiste des composantes du tenseur d'énergie-impulsion :

$$t_{ij} = R^2 m_0 v_i v_j + R^2 \frac{\hbar^2}{2m_0} [2\partial_i \text{Log } R \partial_j \text{Log } R - \delta_{ij}(2\partial_k \text{Log } R \partial_k \text{Log } R + \Delta \text{Log } R)]$$

soit :

$$t_{ij} = R^2 m_0 v_i v_j + \frac{\hbar^2}{2m_0} [2\partial_i R \partial_j R - \delta_{ij}(2\nabla R \nabla R + R \Delta R)]$$

$$t_{k\otimes} \equiv g_k = R^2 m_0 v_k \quad t_{\otimes\otimes} = -R^2 m_0.$$

On voit qu'on retrouve exactement les expressions que nous avons obtenues en appliquant notre procédé général à l'équation de Schrödinger, expressions qui diffèrent, par la forme du tenseur des tensions quantiques, de celles qui décrivent le fluide de Madelung. Nous savons, du reste, que la force de tension (non-relativiste) est la même dans les deux cas. On voit que, dans la formulation relativiste rigoureuse, il n'en est pas de même et que les deux expressions de φ_μ diffèrent notablement. On a bien affaire à deux fluides différents.

§ 9. Fonction d'onde de Dirac. — Représentation tensorielle.

Appliquons maintenant notre méthode au cas de l'équation de Dirac pour la particule de spin $\frac{1}{2}$. Nous ne donnerons pas de détails, nous

contentant de retrouver par la méthode générale les résultats donnés dans le traité fondamental de Takabayasi ⁽⁹⁾. On le sait, la fonction d'onde de Dirac est un spineur. Il s'agit d'en donner une représentation hydrodynamique tensorielle. C'est pourquoi il nous paraît utile de rappeler rapidement ici les relations classiques entre spineurs et tenseurs. La variance des spineurs à quatre composantes (qu'on appelle parfois 4-spineurs) est liée étroitement aux propriétés des quatre matrices de Dirac, matrices que nous définirons par la règle de commutation :

$$(IV-8) \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

Il est inutile de préciser la représentation choisie. Nous nous contenterons de supposer qu'on a choisi une représentation *hermitienne* :

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu.$$

Les indices μ prennent les quatre valeurs 1-2-3-4 correspondant aux axes de l'univers de Minkowski.

Il existe une relation fondamentale entre les transformations canoniques opérant sur ces matrices et les transformations de Lorentz opérant sur les axes de Minkowski. Commençons par associer à toute transformation *infinitésimale* de Lorentz : $L_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$ ($\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ infinitésimal), une transformation matricielle infinitésimale :

$$T = 1 + \frac{1}{4} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \omega_{\mu\nu}.$$

On montre facilement que la transformation T agissant sur un des produits matriciels $\gamma_4 \gamma_{\mu}$ équivaut à faire agir la transformation de Lorentz correspondante sur chacune des matrices $\gamma_4 \gamma_{\mu}$ considérées comme les quatre composantes d'un vecteur :

$$T^+ (\gamma_4 \gamma_{\mu}) T = (\delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}) (\gamma_4 \gamma_{\nu}).$$

Prenons, en effet, le conjugué hermitique de la relation de définition :

$$T \equiv 1 + \frac{1}{4} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \omega_{\mu\nu}, \quad T^+ \equiv 1 + \frac{1}{4} \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} \omega_{\mu\nu}^*.$$

En prenant garde que les ω_{ij} sont réels, et les ω_{k4} et ω_{4k} imaginaires purs, on a :

$$T^+ = 1 + \frac{1}{4} \gamma_j \gamma_i \omega_{ij} - \frac{1}{4} \gamma_4 \gamma_k \omega_{k4} - \frac{1}{4} \gamma_k \gamma_4 \omega_{4k}$$

Et comme ω_{ij} est antisymétrique, la relation de commutation donne :

$$T^+ = 1 - \frac{1}{4} \gamma_j \gamma_i \omega_{ji} - \frac{1}{4} \gamma_4 \gamma_k \omega_{k4} - \frac{1}{4} \gamma_k \gamma_4 \omega_{4k}$$

Pour obtenir une forme covariante, on multiplie par γ_4 à droite, et, en tenant compte de la relation de commutation, il vient :

$$T^+ \gamma_4 = \gamma_4 - \frac{1}{4} \gamma_4 \gamma_j \gamma_i \omega_{ji} - \frac{1}{4} \gamma_4 \gamma_k \gamma_4 \omega_{k4} - \frac{1}{4} \gamma_4 \gamma_k \gamma_4 \omega_{4k}$$

ou enfin :

$$T^+ \gamma_4 = \gamma_4 \left(1 - \frac{1}{4} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \omega_{\mu\nu} \right)$$

On remarque que la parenthèse est simplement la matrice t inverse de T , d'où :

$$T^+ \gamma_4 = \gamma_4 t \quad \text{avec} \quad t = 1 - \frac{1}{4} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \omega_{\mu\nu}$$

On peut maintenant exprimer la transformation $T^+ \gamma_4 \gamma_{\mu} T$:

$$T^+ \gamma_4 \gamma_{\lambda} T = \gamma_4 \left(1 - \frac{1}{4} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \omega_{\mu\nu} \right) \gamma_{\lambda} \left(1 + \frac{1}{4} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \omega_{\mu\nu} \right)$$

ou, en négligeant le terme en $(\omega_{\mu\nu})^2$:

$$T^+ \gamma_4 \gamma_\lambda T = \gamma_4 \left[\gamma_\lambda + \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} (\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda) \right]$$

La parenthèse fournit, d'après (8) :

$$(-\gamma_\mu \gamma_\lambda + 2\delta_{\mu\lambda}) \gamma_\nu - \gamma_\mu (-\gamma_\lambda \gamma_\nu + 2\delta_{\lambda\nu}) = 2(\delta_{\mu\lambda} \gamma_\nu - \delta_{\nu\lambda} \gamma_\mu)$$

$$T^+ \gamma_4 \gamma_\lambda T = \gamma_4 \left[\gamma_\lambda + \frac{1}{2} (\omega_{\lambda\nu} \gamma_\nu - \omega_{\mu\lambda} \gamma_\mu) \right] = \gamma_4 \gamma_\lambda + \omega_{\lambda\nu} \gamma_4 \gamma_\nu = (\delta_{\lambda\nu} + \omega_{\lambda\nu}) \gamma_4 \gamma_\nu$$

C'est bien la transformation de Lorentz annoncée.

Comme les transformations de Lorentz et les transformations $t\gamma_\lambda T$ constituent deux groupes, cette propriété peut se généraliser à une transformation quelconque considérée comme le produit de transformations infinitésimales : à toute transformation de Lorentz $L_{\mu\nu}$, on peut faire correspondre de façon unique une transformation T telle que :

$$T^+ \gamma_4 \gamma_\mu T = L_{\mu\nu} \gamma_4 \gamma_\nu$$

Considérons alors un spineur à quatre composantes. La notation ψ représente l'ensemble des quatre composantes disposée en forme de matrice-colonne et soumises aux règles ordinaires du calcul matriciel :

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi_{(1)} \\ \psi_{(2)} \\ \psi_{(3)} \\ \psi_{(4)} \end{vmatrix}$$

On définira de même le conjugué complexe ψ^* formé avec les complexes conjugués des $\psi_{(k)}$:

$$\psi^* = \begin{vmatrix} \psi_{(1)}^* \\ \psi_{(2)}^* \\ \psi_{(3)}^* \\ \psi_{(4)}^* \end{vmatrix}$$

Le conjugué hermitique ψ^+ sera la matrice-ligne constituée avec les $\psi_{(k)}^*$:

$$\psi^+ = | \psi_{(1)}^* \psi_{(2)}^* \psi_{(3)}^* \psi_{(4)}^* |$$

Enfin, nous définirons le spineur « adjoint de Dirac », ou simplement spineur adjoint par le produit : $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4$.

Nous fixerons alors la variance du spineur par la règle suivante : à toute transformation de Lorentz sur le système de référence correspondra, pour le spineur, l'action de l'opérateur T défini ci-dessus. Lorsqu'un vecteur A_μ deviendra : $A'_\mu = L_{\mu\nu} A_\nu$, un spineur ψ deviendra : $\psi' = T\psi$.

Le spineur conjugué ψ^+ deviendra : $\psi'^+ = \psi^+ T^+$ et le spineur adjoint : $\bar{\psi} = (\psi^+ \gamma_4)$ deviendra :

$$\bar{\psi}' = \psi^+ T^+ \gamma_4 = \psi^+ \gamma_4 t = \bar{\psi} t.$$

Ceci étant, à l'aide d'un spineur ψ nous pouvons former des quantités : $A_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ qui sont, en fait, une fois choisie une représentation pour les γ_μ , des combinaisons bilinéaires des composantes du spineur. Opérons une transformation de Lorentz : il vient :

$$A'_\mu = \bar{\psi}' \gamma_\mu \psi' = \bar{\psi} \gamma_\mu T \psi = \psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu T \psi = \psi^\dagger T^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu T \psi$$

où, en appliquant la propriété fondamentale de T :

$$A'_\mu = \psi^\dagger L_{\mu\nu} \gamma_4 \gamma_\nu \psi = L_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_\nu \psi = L_{\mu\nu} A_\nu$$

On voit que les quantités A_μ sont des *vecteurs*.

Cette conclusion s'étend immédiatement au cas d'un produit quelconque de matrices γ_μ . Ainsi la quantité $\frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi$ est un tenseur antisymétrique de second rang. On peut, d'ailleurs, choisir les opérateurs de sorte que les grandeurs tensorielles soient réelles, ou du moins que leurs composantes d'espace soient réelles et leurs composantes de temps imaginaires pures. Ainsi, si on pose : $S_\mu = i \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ la complexe conjuguée d'une composante d'espace : $S_k = i \psi^\dagger \gamma_4 \gamma_k \psi$ sera : $S_k^* = -i \psi^\dagger \gamma_k \gamma_4 \psi$ ou, à cause de (8) : $S_k^* = i \psi^\dagger \gamma_4 \gamma_k \psi = S_k$.

Pour la composante de temps, on aura :

$$S_4 = i \psi^\dagger \gamma_4 \gamma_4 \psi \quad S_4^* = -i \psi^\dagger \gamma_4 \gamma_4 \psi = -S_4$$

On peut alors former un ensemble de grandeurs tensorielles réelles correspondant à l'ensemble complet de matrices formées avec les γ_μ . On a ainsi :

un scalaire :

$$\Omega = \bar{\psi} \psi$$

pour la matrice unité ;

un vecteur :

$$S_\mu = i \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

pour les matrices γ_μ .

Un tenseur

antisymétrique :

$$M_{[\mu\nu]} = -\frac{i}{2} \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi$$

correspondant aux six matrices indépendantes $\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu$ qu'on peut tirer des produits $\gamma_\mu \gamma_\nu$, compte tenu de la règle de commutation.

On peut aussi utiliser le (pseudo) tenseur :

$$\widehat{M}_{[\mu\nu]} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\psi} \gamma_\alpha \gamma_\beta \psi$$

Le tenseur $M_{\mu\nu}$ est le dual de $\widehat{M}_{\mu\nu}$:

$$M_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} M_{\alpha\beta}$$

Ces deux tenseurs expriment donc les mêmes données.

Les produits de trois matrices ne conduisent qu'à quatre matrices nouvelles indépendantes, complètement antisymétriques. On les remplace par leur dual :

$$\widehat{\gamma}_\mu = \frac{i}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta$$

On définit ainsi :

un (pseudo) vecteur :

$$\widehat{S}_\mu = -\bar{\psi} \widehat{\gamma}_\mu \psi$$

enfin, un (pseudo) scalaire :

$$\widehat{\Omega} = i \bar{\psi} \gamma_5 \psi$$

$$(\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)$$

On remarque que la matrice γ_5 qui anticommute avec les quatre matrices γ_μ joue, compte tenu des relations de commutation, un rôle analogue au symbole $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ quand on l'applique à un produit antisymétrique de matrices γ_μ . Ainsi on a :

$$\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_5 = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta$$

d'où :

$$\widehat{M}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_5 \psi$$

De même :

$$\widehat{\gamma}_\mu = \frac{i}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta = i \gamma_\mu \gamma_5$$

d'où :

$$\widehat{S}_\mu = i \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi$$

Bien entendu, ces quantités tensorielles qui sont déterminées par les huit variables impliquées par les quatre composantes complexes du spineur, ne sont pas indépendantes. Les relations entre elles peuvent être obtenues à partir d'une identité fondamentale démontrée par Pauli ⁽⁵⁶⁾ entre les éléments des matrices γ_μ . On a, en explicitant pour chaque élément l'indice de sa ligne et celui de sa colonne que l'on inscrit en haut :

(IV-9)

$$\gamma_\mu^{\rho\sigma} \gamma_\mu^{\rho'\sigma'} = -(\delta^{\rho\sigma} \delta^{\rho'\sigma'} + \gamma_5^{\rho\sigma} \gamma_5^{\rho'\sigma'}) + 2\delta^{\rho\sigma'} \delta^{\rho'\sigma} - 2(B^{-1})^{\rho\rho'} B^{\sigma\sigma'}$$

B désignant une matrice introduite par Pauli qui transforme chaque γ_μ dans la matrice transposée γ_μ^T : $\gamma_\mu^T = B\gamma_\mu B^{-1}$.

Cette matrice est antisymétrique, de même que $B\gamma_\mu$ et $B\gamma_5$. En multipliant cette relation une fois ou plusieurs, par un élément des matrices $\gamma_\mu^{\alpha\beta}$ ou $\gamma_5^{\alpha\beta}$, la multiplication étant contractée par rapport à un des indices supérieurs, on obtient toute une série d'autres identités.

Si maintenant, on multiplie l'une de ces relations par deux composantes $\psi^\sigma\psi^{\sigma'}$ du spineur et deux composantes $\bar{\psi}^{\bar{\sigma}}\bar{\psi}^{\bar{\sigma}'}$ de son adjoint, avec sommation sur les quatre indices, on obtient une identité entre les grandeurs tensorielles. Par exemple, si on multiplie simplement la relation fondamentale (9), on voit apparaître des produits contractés qui s'écrivent en notation spinorielle :

$$\psi^\sigma\psi^{\sigma'}/\bar{\psi}^{\bar{\sigma}}\bar{\psi}^{\bar{\sigma}'}\gamma_\mu^{\sigma\sigma'}\gamma_\mu^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}'} = \bar{\psi}^{\bar{\sigma}}\gamma_\mu^{\bar{\sigma}\sigma}\psi^\sigma.\bar{\psi}^{\bar{\sigma}'}\gamma_\mu^{\sigma'\sigma'}\psi^{\sigma'} = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi.\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \text{etc...}$$

Le dernier terme disparaît dans tous les cas à cause de l'antisymétrie de $B^{\sigma\sigma'}$ et de $(B^{-1})^{\sigma\sigma'}$ alors que $\bar{\psi}^{\bar{\sigma}}\bar{\psi}^{\bar{\sigma}'}$ et $\psi^\sigma\psi^{\sigma'}$ sont symétriques. Finalement, il vient :

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi.\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = -(\bar{\psi}\psi.\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\gamma_5\psi.\bar{\psi}\gamma_5\psi) + 2\bar{\psi}\psi$$

soit : $-S_\mu S_\mu = \Omega.\Omega + \widehat{\Omega}.\widehat{\Omega}$.

On obtient, de cette façon, les quatre relations suivantes que nous appellerons « identités de première espèce » :

$$(IV-10) \quad S_\mu S_\mu = -(\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2)$$

$$(IV-11) \quad \widehat{S}_\mu \widehat{S}_\mu = \Omega^2 + \widehat{\Omega}^2$$

$$(IV-12) \quad S_\mu \widehat{S}_\mu = 0$$

$$(IV-13) \quad (\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2)M_{\mu\nu} = \widehat{\Omega}(\widehat{S}_\mu S_\nu - \widehat{S}_\nu S_\mu) - i\Omega\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\widehat{S}_\alpha S_\beta.$$

Cette dernière relation détermine entièrement $M_{\mu\nu}$ en fonction des quantités Ω , $\widehat{\Omega}$, S_μ , $\widehat{S}_\mu$. En la multipliant par $-\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ on obtient une expression analogue pour $\widehat{M}_{\mu\nu}$:

$$(IV-14) \quad (\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2)\widehat{M}_{\mu\nu} = -\Omega(\widehat{S}_\mu S_\nu - \widehat{S}_\nu S_\mu) - i\widehat{\Omega}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\widehat{S}_\alpha S_\beta.$$

On peut tirer de ces deux relations deux autres identités intéressantes :

Multiplions (13) par $\widehat{\Omega}$, (14) par $-\Omega$ et ajoutons. Il vient, $\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2$ étant en facteur :

$$(IV-15) \quad \widehat{\Omega}M_{\mu\nu} - \Omega\widehat{M}_{\mu\nu} = \widehat{S}_\mu S_\nu - \widehat{S}_\nu S_\mu.$$

De même, en multipliant (13) par Ω et (14) par $\widehat{\Omega}$:

$$(IV-16) \quad \Omega M_{\mu\nu} + \widehat{\Omega}\widehat{M}_{\mu\nu} = -i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\widehat{S}_\alpha S_\beta.$$

Ainsi, nous n'avons à considérer comme grandeurs tensorielles de base que les deux vecteurs $S_\mu, \widehat{S}_\mu$ et les deux scalaires $\Omega, \widehat{\Omega}$ soit dix quantités. Encore sont-elles soumises aux trois identités (10), (11) et (12). Nous avons ainsi sept quantités indépendantes alors que le spineur décrivant la fonction d'onde comporte huit quantités réelles indépendantes. Force nous est ainsi de faire appel à d'autres quantités tensorielles qu'on tire, d'une autre manière, du spineur.

Si nous considérons le gradient $\partial_\mu \psi$ de la fonction d'onde au cours d'une transformation de Lorentz, il est évident que l'opérateur ∂_μ subira la transformation vectorielle $L_{\nu\mu}$ et la fonction ψ la transformation spinorielle correspondante T . Le gradient deviendra $L_{\nu\mu} \partial_\mu T\psi$. On pourra alors reprendre la démonstration que nous avons faite pour les quantités du type :

$$A_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (\text{quantités de première espèce})$$

et l'appliquer aux quantités du type :

$$B_{\nu\mu} = \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi \quad \text{ou} \quad C_{\nu\mu} = \partial_\nu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (\text{quantités de seconde espèce}).$$

On montrera ainsi que ces quantités sont de nouveaux *tenseurs* formés au moyen de la fonction ψ . Remarquons, du reste, que :

$$\partial_\nu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi = \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)$$

La somme $B_{\nu\mu} + C_{\nu\mu}$ est donc le gradient du vecteur de première espèce $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$. Elle ne nous fournit pas de quantité nouvelle. Par contre, la différence :

$$C_{\nu\mu} - B_{\nu\mu} = \partial_\nu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi$$

ne se ramène pas directement aux quantités de première espèce. C'est de telles différences que nous aurons à considérer. Nous n'en utiliserons que trois :

Deux vecteurs :

$$J_\mu = i(\partial_\mu \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \partial_\mu \psi) = i\bar{\psi} [\partial_\mu] \psi$$

et :

$$\widehat{J}_\mu = -(\partial_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \psi - \bar{\psi} \gamma_5 \partial_\mu \psi) = i\bar{\psi} [\partial_\mu] i\gamma_5 \psi$$

Un tenseur :

$$T_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi - \bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi) = -\bar{\psi} [\partial_\mu] \gamma_\nu \psi$$

Le symbole $[\partial_\mu]$ indique que l'on prend la différence des deux termes obtenus, en dérivant d'abord le spineur adjoint $\bar{\psi}$, ensuite le spineur ψ . Le facteur i a pour but de rendre réelles les composantes d'espace, et

imaginaires pures les composantes de temps. Ainsi, si nous prenons le complexe conjugué des composantes de J_μ , il vient :

$$J_\mu^* = -i(\bar{\psi}\partial_\mu^*\psi - \partial_\mu^*\bar{\psi}\psi) = i\bar{\psi}[\partial_\mu]^*\psi$$

soit, comme : $\partial_k^* = \partial_k$ et $\partial_4^* = -\partial_4$

$$J_k^* = i\bar{\psi}[\partial_k]\psi = J_k$$

$$J_4^* = -i\bar{\psi}[\partial_4]\psi = -J_4.$$

Il est, du reste, possible de former d'autres grandeurs tensorielles de seconde espèce au moyen des diverses combinaisons des γ_μ , mais nous n'aurons pas à les utiliser.

Les identités de Pauli sur les éléments des matrices γ_μ permettent, là encore, de faire apparaître des identités sur les grandeurs de seconde espèce. Il suffit d'opérer la multiplication contractée par des produits du type de $\partial_\mu\bar{\psi}^e\psi^\sigma\bar{\psi}^{e'}\psi^{\sigma'}$ et de retrancher à la relation obtenue celle qui est donnée quand on contracte la même identité par $\bar{\psi}^e\partial_\mu\psi^\sigma\bar{\psi}^{e'}\psi^{\sigma'}$. Les termes contenant le produit doublement antisymétrique : $B^{\sigma\sigma'}(B^{-1})^{ee'}$ disparaîtront encore car il reste un produit symétrique, soit $\psi^\sigma\psi^{\sigma'}$, soit $\bar{\psi}^e\bar{\psi}^{e'}$. On obtient ainsi une série d'identités exprimant toutes les quantités de seconde espèce en fonction des deux seuls vecteurs J_μ et $\widehat{J}_\mu$, et des quantités de première espèce. La seule que nous aurons à considérer est relative au tenseur $T_{\mu\nu}$:

$$(IV-17) \quad \Omega T_{\mu\nu} = J_\mu S_\nu + \partial_\mu \widehat{\Omega} S_\nu + \partial_\mu S_\lambda M_{\nu\lambda}.$$

En outre, les vecteurs J_μ et $\widehat{J}_\mu$ sont liés par la relation obtenue de la même manière :

$$(IV-18) \quad \widehat{\Omega} J_\mu - \Omega \widehat{J}_\mu = \widehat{S}_\lambda \partial_\mu S_\lambda = -S_\lambda \partial_\mu \widehat{S}_\lambda$$

d'après (12). Des huit quantités exprimées par J_μ et $\widehat{J}_\mu$, il n'y en a que quatre indépendantes. On les représente par le nouveau vecteur :

(IV-19)

$$K_\mu = \Omega J_\mu + \widehat{\Omega} \widehat{J}_\mu$$

au moyen duquel on peut, en tenant compte de (18), exprimer J_μ et $\widehat{J}_\mu$ et par conséquent toutes les grandeurs de seconde espèce : Multiplions (18) par $\widehat{\Omega}$ et (19) par Ω et ajoutons :

$$(\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2) J_\mu = \Omega K_\mu + \widehat{\Omega} \widehat{S}_\lambda \partial_\mu S_\lambda.$$

Multiplions (18) par $-\Omega$ et (19) par $\widehat{\Omega}$:

$$(\Omega^2 + \Omega^2) \widehat{J}_\mu = \widehat{\Omega} K_\mu - \Omega \widehat{S}_\lambda \partial_\mu S_\lambda$$

En outre, Takabayasi a montré ⁽⁹⁾, en partant des identités de seconde espèce, que K_μ est astreint à une « condition cinématique de seconde espèce » que nous n'écrirons pas, et qu'on peut interpréter comme une condition de « quasi-irrotationnalité ». Il en résulte que K_μ — et l'ensemble des grandeurs de seconde espèce — ne contient en réalité qu'une seule quantité indépendante des grandeurs de première espèce, ce qui complète bien à huit les composantes indépendantes exprimées par tout le formalisme tensoriel.

Il est utile de tirer de l'équation (17) d'autres identités dont nous aurons besoin. On a, en multipliant par $\widehat{\Omega}$:

$$\widehat{\Omega}\Omega T_{\mu\nu} = \widehat{\Omega}J_\mu S_\nu + \widehat{\Omega}\partial_\mu\widehat{\Omega}\widehat{S}_\nu + \widehat{\Omega}\partial_\mu S_\lambda\widehat{M}_{\nu\lambda}.$$

Or, on a d'après (15) : $\widehat{\Omega}M_{\nu\lambda} = \Omega\widehat{M}_{\nu\lambda} + \widehat{S}_\nu S_\lambda - \widehat{S}_\lambda S_\nu$.

En multipliant par $\partial_\mu S_\lambda$, on fera apparaître, d'autre part, $S_\lambda\partial_\mu S_\lambda$ qui, d'après (10), est égal à $-\Omega\partial_\mu\Omega - \widehat{\Omega}\partial_\mu\widehat{\Omega}$, et $\widehat{S}_\lambda\partial_\mu S_\lambda$ qui, d'après (18), est égal à $\Omega\widehat{J}_\mu - \widehat{\Omega}J_\mu$. On aura ainsi :

$$\widehat{\Omega}\Omega T_{\mu\nu} = \widehat{\Omega}J_\mu S_\nu + \widehat{\Omega}\partial_\mu\widehat{\Omega}\widehat{S}_\nu + \Omega\partial_\mu S_\lambda\widehat{M}_{\nu\lambda} - \Omega\partial_\mu\Omega\widehat{S}_\nu - \widehat{\Omega}\partial_\mu\widehat{\Omega}\widehat{S}_\nu + \Omega\widehat{J}_\mu S_\nu - \widehat{\Omega}J_\mu S_\nu.$$

soit, après réduction et division, par Ω :

$$(IV-20) \quad \widehat{\Omega}T_{\mu\nu} = \widehat{J}_\mu S_\nu - \partial_\mu\Omega\widehat{S}_\nu + \partial_\mu S_\lambda\widehat{M}_{\nu\lambda}.$$

Enfin, en multipliant (17) par Ω et (20) par $\widehat{\Omega}$:

$$(\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2)T_{\mu\nu} = (\Omega J_\mu + \widehat{\Omega}\widehat{J}_\mu)S_\nu + (\Omega\partial_\mu\widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}\partial_\mu\Omega)\widehat{S}_\nu + \partial_\mu S_\lambda(\widehat{\Omega}\widehat{M}_{\nu\lambda} + \Omega M_{\nu\lambda})$$

On voit ainsi apparaître, au premier terme, le vecteur K_μ précédemment défini, au second terme, une quantité dérivée des grandeurs de première espèce que nous désignerons par :

$$Q_\mu = \Omega\partial_\mu\widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}\partial_\mu\Omega.$$

Enfin, au troisième terme, une quantité qui, d'après (16) est égale à $-i\varepsilon_{\gamma\lambda\alpha\beta}\widehat{S}_\alpha S_\beta$. D'où :

$$(IV-21) \quad (\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2)T_{\mu\nu} = K_\mu S_\nu + Q_\mu\widehat{S}_\nu - \partial_\mu S_\lambda i\varepsilon_{\gamma\lambda\alpha\beta}\widehat{S}_\alpha S_\beta$$

§ 10. Fonction d'onde de Dirac. — Modèle hydrodynamique : courant et spin.

Il est essentiel de remarquer que la définition de toutes ces grandeurs tensorielles et les identités que nous avons établies entre elles sont entiè-

rement indépendantes de la théorie de Dirac et découlent uniquement du fait que la fonction d'onde est un 4-spineur et que sa variance fait intervenir les matrices γ . On peut appliquer ce formalisme tel quel à d'autres équations spinorielles que celle de Dirac ⁽⁶⁶⁾. Nous allons, maintenant, au contraire, passer au cas de Dirac et introduire de nouvelles grandeurs et des relations hydrodynamiques liées essentiellement à la théorie de Dirac, c'est-à-dire ne s'appliquant qu'à la fonction d'onde de l'électron.

Nous utiliserons le lagrangien (réel) de Dirac en spineurs, sous la forme de Von Neumann ⁽⁷¹⁾ :

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar c}{2} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi - \partial_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi + 2\kappa \bar{\psi} \psi)$$

avec :

$$\kappa = \frac{mc}{\hbar}.$$

D'où on tire immédiatement les équations de Dirac :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi &= -\kappa \psi \\ \partial_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} &= +\kappa \bar{\psi}. \end{aligned}$$

Il résulte de ces équations que le lagrangien est nul : $\mathcal{L} = 0$.

Nous tirons de ce lagrangien les grandeurs fondamentales de notre hydrodynamique, conformément à la méthode exposée au début de ce chapitre.

Le *courant* est donné par :

$$j_{\mu} = i \frac{\hbar c}{2} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi + \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi) = i \hbar c \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi.$$

On fait ainsi apparaître le vecteur :

$$i \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi = S_{\mu}$$

d'où :

$$j_{\mu} = \hbar c S_{\mu}.$$

D'ailleurs, il résulte immédiatement des équations de Dirac que j_{μ} est conservatif :

$$i \hbar c \partial_{\mu} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi) \equiv \partial_{\mu} j_{\mu} = i \hbar c (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi + \partial_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi) = 0.$$

La densité de matière ρ est donnée par :

$$\begin{aligned} j_{\mu} j_{\mu} &= -\rho^2 c^2 \hbar^2 = \hbar^2 c^2 S_{\mu} S_{\mu} \\ \rho^2 &= -S_{\mu} S_{\mu}. \end{aligned}$$

Or la relation (10) nous donne :

$$\rho^2 = \Omega^2 + \widehat{\Omega}^2.$$

On en tire directement la *vitesse unitaire* :

$$u_\mu = \frac{j_\mu}{\rho \hbar} = \frac{c S_\mu}{\rho} = \frac{c S_\mu}{\sqrt{\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2}}$$

ce qui donne bien : $u_\mu u_\mu = -c^2$.

Passons au tenseur de Belinfante :

$$f_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\lambda}} \bar{\mathcal{Z}}_{[\mu\nu](op.)} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{,\lambda}} \bar{\mathcal{Z}}_{\mu\nu}(op.) \bar{\psi}.$$

Nous savons que, pour une transformation de Lorentz infinitésimale $\omega_{[\mu\nu]}$, le spineur ψ subit la transformation : $\psi' = T\psi$ avec : $T = 1 + \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu) \omega_{\mu\nu}$ ou, pour tenir compte de l'antisymétrie de $\omega_{\mu\nu}$:

$$T = 1 + \frac{1}{8} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \omega_{\mu\nu}.$$

L'opérateur $\mathcal{Z}_{[\mu\nu]}$ pour le spineur ψ est donc :

$$\mathcal{Z}_{[\mu\nu](op.)} = \frac{1}{8} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$$

Pour le spineur adjoint : $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$ nous avons la transformation : $\bar{\psi}' = \bar{\psi} t$, t étant l'inverse de T , ce qui nous donne un opérateur :

$$\bar{\mathcal{Z}}_{[\mu\nu](op.)} = -\frac{1}{8} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu).$$

Au total, on a donc :

$$f_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{\hbar c}{2} \left[\bar{\psi}_{,\lambda} \frac{1}{8} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi + \bar{\psi} \frac{1}{8} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_\lambda \psi \right].$$

On a, en appliquant les relations de commutation :

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) &= -(\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu) + 2\delta_{\lambda\mu} \gamma_\nu - 2\delta_{\lambda\nu} \gamma_\mu \\ (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_\lambda &= -(\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu) + 2\gamma_\mu \delta_{\lambda\nu} - 2\gamma_\nu \delta_{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

En additionnant les deux opérateurs, il ne reste que les termes entre parenthèses, d'où :

$$f_{[\mu\nu]\lambda} = -\frac{\hbar c}{8} \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu) \psi.$$

D'après la formule initiale, on sait que les seuls composantes non nulles de ce tenseur sont celles pour lesquelles : $\mu \neq \nu$.

On peut considérer les composantes pour lesquelles : $\lambda = \mu \neq \nu$.
On aura (sans sommation sur μ) :

$$f_{\mu\nu\mu} = -\frac{\hbar c}{8} \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\mu) = 0$$

et de même si : $\lambda = \nu \neq \mu$.

Les seules composantes à considérer sont donc celles pour lesquelles :

$$\lambda \neq \mu \neq \nu$$

et il résulte alors de la relation de commutation que le tenseur $f_{\mu\nu\lambda}$ est complètement antisymétrique et on peut l'écrire :

$$f_{[\mu\nu\lambda]} = \frac{\hbar c}{4} \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \psi \quad (\mu \neq \nu \neq \lambda).$$

On peut également introduire la quatrième matrice : $\gamma_\alpha (\mu \neq \nu \neq \lambda \neq \alpha)$

et écrire (sans sommation) : $f_{\mu\nu\lambda} = \frac{\hbar c}{4} \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\alpha \psi$.

On remarque alors qu'on a : $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\alpha = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \gamma_5$
d'où :

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu\lambda} &= \frac{\hbar c}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\alpha \psi \\ &= -\frac{i\hbar c}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \bar{\psi} i \gamma_5 \gamma_\alpha \psi \end{aligned}$$

ce qui met en évidence le vecteur : $\widehat{S}_\alpha = i \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\alpha \psi$.

Et on a finalement :

$$f_{\mu\nu\lambda} = -\frac{i\hbar c}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \widehat{S}_\alpha.$$

Le moment angulaire interne $s_{[\mu\nu]}$ s'obtient immédiatement par :

$$f_{\mu\nu\lambda} u_\lambda = -c^2 \frac{1}{2} s_{\mu\nu} = -\frac{i\hbar c}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \widehat{S}_\alpha u_\lambda.$$

(IV-22)

$$s_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{2c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} u_\lambda \widehat{S}_\alpha.$$

On voit tout de suite que : $s_{\mu\nu} u_\nu = 0$: le fluide de Dirac-Takabayasi est donc un fluide de Weyssenhoff. On peut mettre, comme dans le cas de Weyssenhoff (voir notre chapitre III), le moment angulaire interne sous la forme :

$$(IV-23) \quad s_{\mu\nu} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} u_\lambda \sigma_\alpha.$$

σ_α désignant la densité de spin, orthogonale à u_α . Comme l'équation (12) nous montre que $\widehat{S}_\alpha$ est en effet orthogonal à u_α , on peut identifier les équations (22) et (23) en posant :

$$\sigma_\alpha = \frac{\hbar}{2} \widehat{S}_\alpha.$$

La relation (11) nous montre alors que : $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha \sigma_\alpha \Rightarrow \frac{\hbar^2}{4} \rho^2$ d'où le module de la densité de spin : $\sigma_0 = \rho \frac{\hbar}{2}$.

Autrement dit, le spin « particulaire » est constant et égal à $\frac{\hbar}{2}$, propriété que les particules dont notre fluide peut être constitué, partagent avec l'électron lui-même.

On peut remarquer que le tenseur $f_{\mu\nu\lambda}$ ne se réduit nullement au terme $s_{\mu\nu} u_\lambda$. On a un développement :

$$f_{\mu\nu\lambda} = s_{\mu\nu} u_\lambda - \frac{i\hbar c}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \widehat{S}_\alpha \left(\frac{u_\lambda u_\lambda}{c^2} + \delta_{\lambda\lambda} \right).$$

Normalement, nous devrions faire disparaître le dernier terme par une transformation de jauge et opérer la transformation équivalente sur le tenseur d'énergie-impulsion qu'il nous reste à exprimer. Cependant, comme nous avons voulu simplement résumer ici la théorie de Takabayasi, nous nous contenterons d'appliquer son « deuxième procédé de jauge », malgré les objections que nous lui avons faites au début du présent chapitre. De ce point de vue, comme le tenseur $f_{\mu\nu\lambda}$ s'exprime exclusivement au moyen du spin, on n'a aucune transformation de jauge à effectuer.

Bien entendu, l'expression de $f_{\mu\nu\lambda}$: $f_{\mu\nu\lambda} = -\frac{ic}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \sigma_\alpha$ n'est pas celle de Weyssenhoff. L'équation de Weyssenhoff pour les couples :

$$t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu} = \hat{s}_{\mu\nu}$$

qui traduit simplement la loi générale de conservation :

$$t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu} = 2\partial_\lambda f_{\mu\nu\lambda}$$

doit être remplacée par :

$$t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu} = -ic\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \partial_\lambda \sigma_\alpha.$$

§ 11. Fonction d'onde de Dirac : Tenseur d'énergie impulsion et équations hydrodynamiques.

Passons à l'étude du tenseur d'énergie-impulsion. On a :

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_{,\nu}} \partial_\mu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}_{,\nu}} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \frac{\hbar c}{2} (\bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi), \end{aligned}$$

On reconnaît une des grandeurs de seconde espèce :

$$t_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{2} \bar{\psi} [\partial_\mu] \gamma_\nu \psi = \frac{\hbar c}{2} T_{\mu\nu}.$$

On peut donc l'exprimer au moyen de l'identité (21) :

$$t_{\mu\nu} = \frac{\hbar c}{2c^2} \left[\frac{\rho}{c} K_\mu u_\nu + \frac{2}{\hbar} Q_\mu \sigma_\nu - \frac{2\rho}{\hbar c^2} i\varepsilon_{\gamma\lambda\alpha\beta} \partial_\mu (\rho u_\lambda) \sigma_\alpha u_\beta \right].$$

Pour exprimer la quantité : $Q_\mu = \Omega \partial_\mu \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega} \partial_\mu \Omega$ on doit expliciter les deux invariants Ω et $\widehat{\Omega}$ en fonction de ρ et d'une nouvelle variable que nous représenterons par un angle A , comme dans l'étude du corpuscule classique de Dirac (chap. III).

Nous poserons : $\Omega = \rho \cos A$ $\widehat{\Omega} = \rho \sin A$ ce qui donne bien : $\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2 = \rho^2$.

Nous avons alors :

$$Q_\mu = \rho \cos A (\rho \cos A \partial_\mu A + \sin A \partial_\mu \rho) - \rho \sin A (-\rho \sin A \partial_\mu A + \cos A \partial_\mu \rho)$$

soit :

$$Q_\mu = \rho^2 \partial_\mu A.$$

D'autre part, si dans l'expression de $t_{\mu\nu}$ on développe $\partial_\mu (\rho u_\lambda)$, le terme $u_\lambda \partial_\mu \rho$ s'annulera par antisymétrie. Le dernier terme du crochet donne donc :

$$-\frac{2\rho}{\hbar c^2} i\varepsilon_{\gamma\lambda\alpha\beta} \rho \partial_\mu u_\lambda \sigma_\alpha u_\beta$$

soit :

$$+\frac{2\rho^2}{\hbar c} \partial_\mu u_\lambda s_{\gamma\lambda}.$$

Le tenseur d'énergie-impulsion prend la forme :

$$t_{\mu\nu} = \frac{\hbar}{2c} K_\mu u_\nu + c \partial_\mu A \sigma_\nu + s_{\gamma\lambda} \partial_\mu u_\lambda.$$

Nous en tirons l'impulsion :

$$-c^2 g_\mu \equiv t_{\mu\nu} u_\nu = -c^2 \frac{\hbar}{2\rho} K_\mu$$

$$g_\mu = \frac{\hbar}{2} \frac{K_\mu}{\rho}$$

et $t_{\mu\nu}$ se met sous la forme :

(IV-24)

$$t_{\mu\nu} = g_\mu u_\nu + c \partial_\mu A \sigma_\nu + s_{\gamma\lambda} \partial_\mu u_\lambda.$$

La partie non cinétique constituée par les deux derniers termes permet de définir :

— un courant de chaleur : $-c^2 q_\nu = (c \partial_\mu A \sigma_\nu + s_{\gamma\lambda} \partial_\mu u_\lambda) u_\mu$
soit :

$$q_\nu = -\frac{1}{c} \dot{A} \sigma_\nu - \frac{1}{c^2} s_{\gamma\lambda} \dot{u}_\lambda$$

— un tenseur des tensions internes :

$$\theta_{\mu\nu} = c \partial_\mu A \sigma_\nu + s_{\gamma\lambda} \partial_\mu u_\lambda + \frac{1}{c} \dot{A} \sigma_\nu u_\mu + \frac{1}{c^2} s_{\gamma\lambda} \dot{u}_\lambda u_\mu$$

qui s'écrit plus simplement :

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda} (c \partial_\lambda A \sigma_\nu + s_{\gamma\alpha} \partial_\lambda u_\alpha) \quad \left(\eta_{\mu\lambda} = \delta_{\mu\lambda} + \frac{u_\mu u_\lambda}{c^2} \right).$$

Si nous voulons décomposer et analyser de plus près l'impulsion, nous avons besoin d'introduire une relation supplémentaire, notre formalisme comportant une variable A qui n'a pu être interprétée du point de vue hydrodynamique et qui n'est par conséquent pas régie par une loi dynamique. Nous devons faire un emprunt aux équations d'onde elles-mêmes (faisons remarquer, en passant, que c'est exclusivement de celles-ci que Takabayasi tire *toutes* les équations hydrodynamiques). Nous partirons simplement du fait que les équations d'onde annulent le lagrangien, comme nous l'avons déjà signalé. Le lagrangien peut, d'autre part, être exprimé en fonction des quantités tensorielles fondamentales :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\hbar c}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + 2\kappa \bar{\psi} \psi) \\ &= \frac{\hbar c}{2} (T_{\mu\mu} + 2\kappa \Omega) \end{aligned}$$

ou, en fonction des variables hydrodynamiques :

$$\mathcal{L} = t_{\mu\mu} + \rho m_0 c^2 \cos A.$$

On a donc, en vertu des équations d'onde :

$$t_{\mu\mu} + \rho m_0 c^2 \cos A = 0$$

ce qui donne, en remplaçant $t_{\mu\mu}$ par son expression :

$$g_\mu u_\mu + c \sigma_\mu \partial_\mu A + s_{\mu\lambda} \partial_\mu u_\lambda + \rho m_0 c^2 \cos A = 0.$$

D'où l'expression de la densité de masse propre, qui a été donnée pour la première fois par Yvon (72) :

$$(IV-25) \quad \mu_0 = \rho m_0 \cos A + \frac{1}{c} \sigma_\mu \dot{\partial}_\mu A + \frac{1}{c^2} s_{\mu\lambda} \partial_\mu u_\lambda.$$

On y voit figurer la masse propre particulaire m_0 , mais affectée d'un coefficient $\cos A$, ce qui peut conduire à considérer la variable A comme exprimant en quelque sorte la composition d'un mélange de deux fluides, porteurs, l'un d'une énergie positive, l'autre, d'une énergie négative. A intervient aussi par son gradient dans le second terme.

Quant au troisième, il peut aussi s'écrire : $\frac{1}{c^2} \frac{1}{2} s_{\mu\lambda} (\partial_\mu u_\lambda - \partial_\lambda u_\mu)$ et on voit sous cette forme qu'il exprime une énergie de couplage entre le moment angulaire et le tourbillon du courant. On peut aussi remarquer que la « pression interne », qu'on peut tirer du tenseur des tensions que nous avons écrit, est :

$$\pi = \frac{1}{3} \theta_{\mu\mu} = c \sigma_\mu \partial_\mu A + s_{\mu\alpha} \partial_\mu u_\alpha.$$

Ainsi la formule d'Yvon exprime le fait qu'à l'énergie $\rho m_0 c^2 \cos A$ vient s'ajouter l'énergie potentielle due à la pression interne du fluide.

Écrivons maintenant l'équation des couples, en nous souvenant que nous nous sommes placés dans la deuxième jauge de Takabayasi :

$$t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu} = 2\partial_\lambda f_{\mu\nu\lambda} = -i c \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \alpha \partial_\lambda \sigma_\alpha.$$

On aura, d'après (24) :

$$(IV-26) \quad g_\mu u_\nu - g_\nu u_\mu + c(\partial_\mu A \sigma_\nu - \partial_\nu A \sigma_\mu) + s_{\nu\lambda} \partial_\mu u_\lambda - s_{\mu\lambda} \partial_\nu u_\lambda = -i c \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \alpha \partial_\lambda \sigma_\alpha.$$

Contractons par u_ν :

$$-c^2 g_\mu + \mu_0 c^2 u_\mu - c \dot{A} \sigma_\mu - s_{\mu\lambda} \dot{u}_\lambda = -i c \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \alpha u_\nu \partial_\lambda \sigma_\alpha.$$

Ceci donne l'expression de l'impulsion :

$$(IV-27) \quad g_\mu = \mu_0 u_\mu - \frac{1}{c} \dot{A} \sigma_\mu - \frac{1}{c^2} s_{\mu\lambda} \dot{u}_\lambda + \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \alpha u_\nu \partial_\lambda \sigma_\alpha.$$

Cette expression peut se transformer en utilisant une identité, conséquence des relations de Pauli-Koffinck, que Vigier, Lochak et moi-même, avons signalée il y a quelques années (26). On a :

$$(IV-28) \quad \boxed{\frac{1}{c^2} (s_{\mu\lambda} u_\nu - s_{\nu\lambda} u_\mu) \partial_\nu u_\lambda + \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \sigma_\alpha \partial_\lambda u_\nu = 0}$$

Tabakayasi a montré (9) qu'une telle relation vectorielle était équivalente aux trois relations obtenues en la contractant par u_μ , par σ_μ et par $s_{\mu\nu}$. Vérifions successivement ces trois relations :

1) contractons par u_μ :

$$s_{\nu\lambda} \partial_\nu u_\lambda + \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} u_\mu \sigma_\alpha \partial_\lambda u_\nu = 0$$

car :

$$\frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} u_\mu \sigma_\alpha = -s_{\lambda\nu}$$

2) la contraction par σ_μ annule chaque terme séparément,

3) contractons par : $s_{\mu\beta} \equiv -\frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\beta\gamma\delta} u_\gamma \sigma_\delta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} (\sigma_0^2 \eta_{\lambda\beta} - \sigma_\lambda \sigma_\beta) \dot{u}_\lambda - \frac{1}{c^2} \delta_{\beta\gamma\gamma}^{\nu\lambda} u_\gamma \sigma_\delta \sigma_\alpha \partial_\lambda u_\nu \\ = \frac{1}{c^2} [\sigma_0^2 \dot{u}_\beta - \sigma_\beta \sigma_\lambda \dot{u}_\lambda - u_\gamma \sigma_\delta \sigma_\beta \partial_\gamma u_\beta + u_\gamma \sigma_\delta \sigma_\beta \partial_\gamma u_\beta = 0]. \end{aligned}$$

L'identité (28) est donc vérifiée. En la portant dans l'expression (27) de g_μ , il vient :

$$(IV-29) \quad g_\mu = \mu_0 u_\mu - \frac{1}{c} \dot{A} \sigma_\mu + \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} u_\nu \partial_\lambda \sigma_\alpha + \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \sigma_\alpha \partial_\lambda u_\nu - \frac{1}{c^2} s_{\nu\lambda} \partial_\nu u_\lambda u_\mu$$

ce qui donne, en remplaçant μ_0 par son expression (25) :

$$g_\mu = \rho m_0 \cos A u_\mu + \frac{1}{c} \sigma_\nu \partial_\nu A u_\mu - \frac{1}{c} \dot{A} \sigma_\mu + \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} (u_\nu \partial_\lambda \sigma_\alpha + \sigma_\alpha \partial_\lambda u_\nu)$$

soit enfin :

$$\boxed{g_\mu = \rho m_0 \cos A \cdot u_\mu + \frac{1}{c} \partial_\nu A (\sigma_\nu u_\mu - \sigma_\mu u_\nu) - \partial_\lambda s_{\mu\lambda}}.$$

La forme (29) permet de faire apparaître, à côté de l'impulsion classique $\mu_0 u_\mu$ colinéaire au courant, une impulsion transversale :

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{1}{c} \dot{A} \sigma_\mu + \partial_\lambda s_{\mu\lambda} + \frac{1}{c^2} s_{\nu\lambda} \partial_\nu u_\lambda u_\mu \\ &= \frac{1}{c} \dot{A} \sigma_\mu - \partial_\nu s_{\nu\mu} - \frac{1}{c^2} u_\lambda u_\mu \partial_\nu s_{\nu\lambda} \end{aligned}$$

ou enfin :

$$p_{\mu} = \frac{1}{c} \dot{A} \sigma_{\mu} - \eta_{\mu\lambda} \partial_{\nu} s_{\nu\lambda}.$$

En contractant successivement l'équation des couples (26) par $u_{\sigma\mu}$, $\frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha}$, $\frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_{\alpha}$, on obtient un système équivalent à (26) d'équations fondamentales d'évolution pour les grandeurs hydrodynamiques :

Contractons (26) par $u_{\sigma\mu}$ ou simplement (27) par σ_{μ} :

$$g_{\mu} \sigma_{\mu} = -\frac{1}{c} \dot{A} \sigma_0^2 + \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \sigma_{\mu} u_{\nu} \partial_{\lambda} \sigma_{\alpha}.$$

On obtient immédiatement l'équation d'évolution pour la variable A :

$$\dot{A} = -\frac{c}{\sigma_0^2} (\sigma_{\mu} g_{\mu} + s_{\lambda\alpha} \partial_{\lambda} \sigma_{\alpha})$$

Contractons par $\frac{i}{2c} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\beta} \sigma_{\gamma}$:

$$\frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\beta} \sigma_{\gamma} g_{\mu} u_{\nu} + \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\beta} \sigma_{\gamma} s_{\nu\lambda} \partial_{\mu} u_{\lambda} - \frac{1}{2} 2\delta_{\gamma\beta}^{\lambda\alpha} \sigma_{\gamma} \partial_{\lambda} \sigma_{\alpha} = 0.$$

Le premier terme vaut simplement $s_{\mu\beta} g_{\mu}$; le second devient, en explicitant $s_{\nu\lambda}$:

$$\frac{1}{c^2} \delta_{\lambda\alpha}^{\mu\gamma\beta} u_{\alpha} \sigma_{\gamma} \sigma_{\gamma} \partial_{\mu} u_{\lambda} = \frac{1}{c^2} (\sigma_{\gamma} \partial_{\mu} u_{\gamma} \sigma_{\mu} u_{\beta} + \sigma_0^2 u_{\beta} - \sigma_0^2 u_{\beta} \partial_{\mu} u_{\mu} - \sigma_{\gamma} \partial_{\mu} u_{\gamma} u_{\mu} \sigma_{\beta}).$$

Nous pouvons introduire, avec Takabayasi, le vecteur z_{μ} :

$$\rho \frac{\hbar}{2} z_{\mu} \equiv \sigma_{\gamma} \partial_{\mu} u_{\gamma} = -u_{\gamma} \partial_{\mu} \sigma_{\gamma}$$

qui représente une quantité particulière. D'autre part, on peut remplacer σ_0^2 par sa valeur $\rho^2 \frac{\hbar^2}{4}$, ce qui donne :

$$\frac{1}{c^2} \left[\rho^2 \frac{\hbar^2}{4} (u_{\mu} \partial_{\mu} u_{\beta} - u_{\beta} \partial_{\mu} u_{\mu}) + \rho \frac{\hbar}{2} z_{\mu} (\sigma_{\mu} u_{\beta} - \sigma_{\beta} u_{\mu}) \right]$$

Nous remarquons que :

$$\rho u_{\mu} \partial_{\mu} u_{\beta} - \rho u_{\beta} \partial_{\mu} u_{\mu} = u_{\mu} \partial_{\mu} (\rho u_{\beta})$$

à cause de la relation : $\partial_{\mu} (\rho u_{\mu}) = 0$.

L'équation prend alors la forme :

$$\frac{1}{c^2} \left[\rho \frac{\hbar^2}{4} u_{\mu} \partial_{\mu} (\rho u_{\beta}) + \rho \frac{\hbar}{2} z_{\mu} (\sigma_{\mu} u_{\beta} - \sigma_{\beta} u_{\mu}) \right] = s_{\beta\mu} g_{\mu} + \sigma_{\gamma} \partial_{\gamma} \sigma_{\beta} - \sigma_{\gamma} \partial_{\beta} \sigma_{\gamma}.$$

Ou, puisque : $\sigma_\gamma \partial_\beta \sigma_\gamma = \frac{\hbar^2}{4} \rho \partial_\beta \rho$:

$$-\sigma_\mu \partial_\mu \sigma_\beta + \rho \frac{\hbar^2}{4} \left[\frac{1}{c^2} u_\mu \partial_\mu (\rho u_\beta) + (\partial_\beta \rho) \right] = s_{\beta\mu} g_\mu - \frac{1}{c^2} \rho \frac{\hbar}{2} z_\mu (\sigma_\mu u_\beta - \sigma_\beta u_\mu) .$$

Enfin, nous contractons l'équation (26) par $\frac{i}{2c} \varepsilon_{\mu\gamma\beta} u_\gamma$

$$\frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\gamma\beta} c \partial_\mu A \sigma_\gamma u_\gamma + \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\gamma\beta} s_{\gamma\lambda} \partial_\mu u_\lambda u_\gamma - \frac{1}{2} 2 \delta_{\gamma\beta}^{\lambda\mu} \partial_\lambda \sigma_\mu u_\gamma = 0 .$$

Le premier terme est

$$c \partial_\mu A s_{\beta\mu} .$$

Le second donne :

$$\frac{1}{c^2} \delta_{\lambda\alpha\beta}^{\gamma\mu} u_\alpha \sigma_\gamma \partial_\mu u_\lambda u_\gamma = -\partial_\mu u_\mu \sigma_\beta + \sigma_\mu \partial_\mu u_\beta = \sigma_\beta u_\mu \partial_\mu \text{Log } \rho + \sigma_\mu \partial_\mu u_\beta$$

en utilisant la relation : $\partial_\mu (\rho u_\mu) = 0$.

On a ainsi :

$$c \partial_\mu A s_{\beta\mu} + \sigma_\beta u_\beta \partial_\mu \text{Log } \rho + \sigma_\mu \partial_\mu u_\beta - u_\gamma \partial_\gamma \sigma_\beta + u_\gamma \partial_\beta \sigma_\gamma = 0 .$$

Ou enfin :

$$\sigma_\mu \partial_\mu u_\beta - u_\mu \partial_\mu \sigma_\beta = \rho \frac{\hbar}{2} z_\beta + c \partial_\mu A s_{\beta\mu} + \sigma_\beta u_\mu \partial_\mu \text{Log } \rho .$$

Il convient de remarquer que tout ce formalisme hydrodynamique, édifié sur la fonction d'onde de Dirac, diffère complètement des considérations de notre chapitre III concernant ce que nous avons appelé le « corpuscule classique » de Dirac. Nous avons été conduits à attribuer à ce dernier un moment angulaire interne non situé dans l'espace propre, et dans l'expression duquel l'angle A intervenait essentiellement. Ici, le fluide continu, représentation hydrodynamique de l'onde régulière qui, d'après les idées de l'interprétation causale, constitue la partie étendue — ou « l'aspect ondulatoire » — de l'électron de Dirac, est un fluide de Weyssenhoff, c'est-à-dire que son moment angulaire interne est situé dans l'espace propre. Son expression ne fait pas intervenir l'angle A , dont le rôle, dans le modèle actuel semble concerner plutôt la répartition de l'énergie, et l'expression de la densité de masse propre μ_0 , qui peut éventuellement devenir négative et donner ainsi une impulsion dirigée à contre-courant (ce que Takabayasi désigne de façon pittoresque comme un « Ass-like Behaviour »). Les considérations fondées sur l'équation de Dirac, dans notre chapitre III, nous ont ainsi

utilement suggéré une voie intéressante pour étudier une dynamique particulière du corpuscule tournant. Mais cette dynamique ne paraît intervenir d'aucune manière dans la représentation hydrodynamique de l'équation de Dirac.

Signalons, pour finir, que l'application de la méthode générale à d'autres équations d'onde a été faite — dans des travaux non encore publiés, du moins à notre connaissance — pour le cas de l'équation de Maxwell (corpuscule de spin 1), par M. Philippe Leruste, à l'Institut Henri Poincaré, et, pour celui de l'équation de Petiau-Kemmer (corpuscule de spin 0), par M. Otsuka, à Nagoya.

CHAPITRE V

FLUIDES A SPIN A STRUCTURE MOLÉCULAIRE

§ 1. Généralités.

Nous allons maintenant utiliser les corpuscules dont nous avons défini la dynamique aux chapitres I, II et III pour constituer des fluides que nous caractériserons en chaque point par un certain nombre de grandeurs continues obtenues en prenant la moyenne, sur un très grand nombre de corpuscules, de chaque grandeur corpusculaire. Cela signifie que nous nous plaçons désormais à une autre échelle, et que les quantités ρ , g_μ , etc... se rapporteront à des moyennes englobant un grand nombre de corpuscules, dont chacun n'intervient que par ses propriétés *globales* (que nous continuons à désigner par des majuscules) et non plus, comme au chapitre II, aux propriétés locales du « sous-fluide » dont chaque corpuscule est constitué.

Dans le présent travail, nous nous limiterons aux fluides constitués par des corpuscules de Weyssenhoff, pour chacun desquels le centre de masse est constamment confondu avec le centre de matière.

Nous étudierons d'abord en détail le cas « matière pure », en l'absence de champ, puis nous introduirons entre les corpuscules des interactions convenables qui se traduiront par l'intervention dans le fluide de tensions internes déterminées.

Nous partons donc de corpuscules dont chacun obéit aux trois équations de Weyssenhoff :

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu}U_\nu &= 0 \\ \dot{G}_\mu &= 0 \\ \dot{S}_{\mu\nu} &= G_\mu U_\nu - G_\nu U_\mu,\end{aligned}$$

équations dont nous avons proposé une interprétation dans notre chapitre II. Nous supposerons que la distribution des corpuscules est conti-

nue, c'est-à-dire que toutes leurs propriétés globales varient très lentement à l'échelle des distances entre corpuscules voisins. Ainsi la valeur moyenne d'une quelconque de ces propriétés prise dans un domaine qui devient de plus en plus petit autour d'un point donné atteindra pratiquement une valeur bien déterminée, alors que les dimensions du domaine sont encore telles qu'il contienne un très grand nombre de corpuscules. Ce sont de telles valeurs moyennes limites que nous utiliserons comme propriétés hydrodynamiques locales du fluide. En particulier, la vitesse unitaire locale du fluide en un point sera la vitesse unitaire moyenne autour du point considéré, du *centre de matière* de chaque corpuscule, c'est-à-dire du quadrivecteur U_μ , vitesse moyenne que nous désignerons par u_μ pour bien marquer qu'il s'agit maintenant d'une grandeur hydrodynamique continue.

Nous introduirons une *densité de matière* ρ qui exprimera le nombre de corpuscules par unité de volume, ce nombre étant calculé dans un volume très petit et dans le système *propre* local. C'est donc la « densité de matière invariante » de l'hydrodynamique relativiste classique. Pour exprimer que le nombre de corpuscules se conserve, nous devons assujettir cette densité à la condition de conservation : $\partial_\nu(\rho u_\nu) = 0$ ce qui est convenable, si on considère conventionnellement chaque corpuscule comme « localisé » en son centre de matière.

Nous pouvons alors, au moyen des moyennes des grandeurs corpusculaires, définir les propriétés hydrodynamiques du fluide, soit la *densité d'impulsion* : $g_\mu = \rho \bar{G}_\mu$ et la densité de moment angulaire propre : $s_{\mu\nu} = \rho \bar{S}_{\mu\nu}$.

Il faut également introduire les dérivées de ces quantités le long d'une ligne de courant, dérivées que nous désignerons par un point et qui, comme on a affaire à des densités, auront l'expression :

$$\dot{g}_\mu = \partial_\nu(u_\nu g_\mu) \quad \text{et} \quad \dot{s}_{\mu\nu} = \partial_\lambda(u_\lambda s_{\mu\nu}) \quad (\text{Appendice A})$$

En utilisant la relation de conservation : $\dot{\rho} = \partial_\nu(u_\nu \rho) = 0$ les équations corpusculaires rappelées plus haut fournissent les équations hydrodynamiques :

$\begin{aligned} u_\mu u_\mu &= -c^2 \\ \dot{g}_\mu &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} s_{\mu\nu} u_\nu &= 0 \\ \dot{s}_{\mu\nu} &= g_\mu u_\nu - g_\nu u_\mu \end{aligned}$
---	--

Elles sont identiques aux équations hydrodynamiques axiomatiques de Weyssenhoff, ce qui n'a rien d'étonnant puisque, comme nous l'avons déjà fait remarquer, on peut tout aussi bien construire un fluide de

Weyssenhoff avec des corpuscules de Weyssenhoff, ou considérer un corpuscule de Weyssenhoff comme une gouttelette de fluide de Weyssenhoff, puisqu'il s'agit d'un fluide « matière pure ».

On définira ainsi :

une densité de masse propre d'inertie :

$$-\mu_0 c^2 = g_\nu u_\nu$$

une densité de masse propre d'impulsion :

$$-m_0^2 c^2 = g_\nu g_\nu.$$

On le voit, la densité de matière ρ s'élimine de toutes les formules et il pourrait sembler que sa relation de conservation n'intervient pas dans le formalisme. En réalité, il faut prendre garde que la dérivée le long d'une ligne de courant que nous avons désignée par un point représente une opération différente suivant qu'on a une densité telle que μ_0 , m_0 , g_μ , $s_{\mu\nu}$ (et de même la densité d'impulsion transversale : $p_\mu = \mu_0 u_\mu - g_\mu$ et la densité de spin : $\sigma_\mu = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu s_{\alpha\beta}$), ou au contraire une grandeur particulière, telle que la vitesse u_μ . On a par exemple :

$$\dot{g}_\mu = \partial_\nu (g_\mu u_\nu)$$

et au contraire :

$$\dot{u}_\mu = u_\nu \partial_\nu u_\mu$$

Ce fait provient de la densité de matière dissimulée dans toutes les grandeurs densitaires et dont la relation de conservation permet seule d'appliquer à ce type de dérivation les règles ordinaires. Ainsi la dérivée d'un produit tel que $s_{\mu\nu} u_\nu$ sera :

$$\frac{d}{d\tau} (s_{\mu\nu} u_\nu) = \frac{d}{d\tau} (\rho S_{\mu\nu} u_\nu) = \partial_\lambda (u_\lambda \rho S_{\mu\nu} u_\nu) = u_\lambda \rho \partial_\lambda (S_{\mu\nu} u_\nu) + S_{\mu\nu} u_\lambda \partial_\lambda (u_\lambda \rho)$$

Le second terme est nul en raison de la loi de conservation. On a ainsi :

$$\frac{d}{d\tau} (s_{\mu\nu} u_\nu) = u_\lambda \rho (u_\lambda \partial_\lambda S_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \partial_\lambda u_\lambda)$$

et on peut, en vertu de la même loi, faire rentrer $u_\lambda \rho$ dans la dérivée :

$$\frac{d}{d\tau} (s_{\mu\nu} u_\nu) = u_\lambda \partial_\lambda (u_\lambda \rho S_{\mu\nu}) + u_\lambda \rho S_{\mu\nu} \partial_\lambda u_\nu$$

On peut alors remplacer $\rho S_{\mu\nu}$ par $s_{\mu\nu}$ et les dérivées $\partial_\lambda (u_\lambda s_{\mu\nu})$ et $u_\lambda \partial_\lambda u_\nu$ par $\dot{s}_{\mu\nu}$ et $\dot{u}_\nu$, d'où :

$$\frac{d}{d\tau} (s_{\mu\nu} u_\nu) = \dot{s}_{\mu\nu} u_\nu + s_{\mu\nu} \dot{u}_\nu.$$

Toutefois cette règle ne s'applique ici — et il faudra y prendre garde — que parce que le produit ne comporte qu'une seule densité. Ainsi la relation : $g_\mu g_\mu = -m_0^2 c^2$ où figure le carré d'une densité, se traduit bien par : $g_\mu \dot{g}_\mu = -m_0 \dot{m}_0 c^2$ comme en le vérifiera en remplaçant le point par l'opérateur complet, mais les deux membres de la seconde équation ne sont pas les dérivées des deux membres de la première.

Moyennant ces quelques précautions, on retrouve des résultats tout à fait identiques formellement à ceux que nous avons obtenus dans l'étude du corpuscule de Weyssenhoff. Portant sur des densités, ces résultats ont parfois une signification différente. Ainsi l'intégration des équations nous a fourni la loi du mouvement d'un vecteur :

$$R_\mu = \frac{1}{M_0^2 c^2} S_\mu \nu G_\nu$$

loi qui se traduit dans le référentiel d'inertie par un mouvement circulaire et uniforme du centre de matière autour du centre de gravité, sur un cercle de rayon déterminé. Dans le cas présent, nous obtiendrons de même un vecteur :

$$R_\mu = \frac{1}{m_0 c^2} s_\mu \nu g_\nu$$

qui tournera d'un mouvement uniforme dans l'espace d'inertie local, et il est facile de voir, en exprimant m_0 , s_μ , et g , au moyen de la densité ρ et des quantités particulières, que le rayon du cercle sera le même que pour une particule unique. L'apparition paradoxale dans une hydrodynamique apparemment continue d'une longueur finie liée aux dimensions des particules avait déjà été signalée par Weyssenhoff, le rayon du mouvement hélicoïdal apparaissant dans une gouttelette se trouvant indépendant des dimensions de cette gouttelette. Ce fait est en relation avec le paradoxe de Costa de Beauregard rappelé dans notre introduction et qui oblige à constituer les fluides dotés d'une densité de rotation interne, de particules finies en nombre fini.

§ 2. Formulation lagrangienne du fluide matière pure sans spin.

Pour traiter le fluide matière pure et surtout pour étendre ce traitement aux fluides dotés de tensions internes, il est utile de constituer un formalisme lagrangien. Rappelons comment on constitue ce formalisme dans le cas du fluide classique matière pure, afin d'étendre le procédé au fluide à spin.

Le lagrangien comporte d'abord le terme classique d'énergie propre $\rho \mathcal{N}_0 c^2$. On y ajoutera des termes de Lagrange destinés à fournir les deux

conditions :

$$u_\mu u_\mu = -c^2 \quad \text{et} \quad \partial_\mu (\rho u_\mu) = 0.$$

Le lagrangien prend alors la forme :

$$\mathcal{L} = \rho \mathcal{N}_0 c^2 + \rho u_\mu \partial_\mu S - \frac{\lambda}{2} (u_\mu u_\mu + c^2)$$

S et λ étant des multiplicateurs de Lagrange. On aura alors les équations :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{ce qui fournit : } u_\mu u_\mu = -c^2$$

$$(V-1) \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_{,\mu}} \right) = 0 \quad \text{qui fournit} \quad \partial_\mu (\rho u_\mu) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \quad \text{soit} \quad \mathcal{N}_0 c^2 + u_\mu \partial_\mu S = 0.$$

D'où il résulte d'ailleurs que : $\mathcal{L} = 0$.

Enfin :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} = 0$$

donne :

$$(V-2) \quad \rho \partial_\mu S - \lambda u_\mu = 0.$$

En contractant par u_μ : $\rho u_\mu \partial_\mu S + \lambda c^2 = 0$

d'où

$$\lambda = -\frac{1}{c^2} \rho u_\mu \partial_\mu S = \frac{1}{c^2} \rho \mathcal{N}_0 c^2 = \rho \mathcal{N}_0 \quad \text{d'après (1)}$$

Si nous transportons cette valeur dans (2) il vient :

$$\rho \partial_\mu S - \rho \mathcal{N}_0 u_\mu = 0 \quad \partial_\mu S = \mathcal{N}_0 u_\mu$$

Ce qui fait apparaître que S est la fonction de Jacobi pour un corpuscule.

On peut maintenant former le tenseur d'énergie-impulsion :

$$t_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_{,\nu}} \partial_\mu S = \rho u_\nu \partial_\mu S = \rho \mathcal{N}_0 u_\mu u_\nu$$

L'équation de conservation : $\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$ fournissant l'équation classique $\rho \mathcal{N}_0 \dot{u}_\mu = 0$.

Il est facile d'étendre ce formalisme au cas « fluide parfait » si on suppose l'existence d'une « équation d'état ». Pour cela, nous remplaçons dans le terme d'énergie propre du lagrangien l'expression $\rho \mathcal{N}_0$ — caractéristique du cas « matière pure » parce qu'elle ne fait apparaître comme masse que celle des particules matérielles — par la quantité plus générale μ_0 par laquelle nous désignons la « densité de masse

propre totale » et nous supposons — c'est l'hypothèse de l'équation d'état — que μ_0 est entièrement déterminée par la densité de matière conservative ρ , c'est-à-dire qu'elle ne dépend des coordonnées et du temps que par l'intermédiaire de ρ . Appliquons alors la méthode précédente au lagrangien :

$$\mathcal{L} = \mu_0(\rho)c^2 + \rho u_\mu \partial_\mu S - \frac{\lambda}{2} (u_\mu u_\mu + c^2).$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \quad \text{donne :} \quad \mu'_0 c^2 + u_\mu \partial_\mu S = 0$$

en désignant par μ'_0 la dérivée de μ_0 par rapport à ρ . Ainsi :

$$u_\mu \partial_\mu S = -\mu'_0 c^2.$$

Le lagrangien n'est plus nul :

$$(V-3) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} = 0 \quad \text{donne} \quad \rho \partial_\mu S - \lambda u_\mu = 0$$

ce qui, contracté par u_μ , fournit : $\rho u_\mu \partial_\mu S + \lambda c^2 = 0$ ou encore : $\lambda = \rho \mu'_0$ ce qui, porté dans (3), fournit : $\partial_\mu S = \mu'_0 u_\mu$.

Enfin l'expression du tenseur d'énergie-impulsion tiré du lagrangien est :

$$t_{\mu\nu} = \rho u_\nu \partial_\mu S - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} = \rho \mu'_0 u_\mu u_\nu - \delta_{\mu\nu} (\mu_0 - \rho \mu'_0) c^2.$$

La densité d'impulsion g_μ est donnée par :

$$-c^2 g_\mu = t_{\mu\nu} u_\nu = -\rho \mu'_0 c^2 u_\mu - \mu_0 c^2 u_\mu + \rho \mu'_0 c^2 u_\mu$$

$$g_\mu = \mu_0 u_\mu$$

relation qui est caractéristique d'un fluide *classique* et qui montre que la quantité variable μ_0 a bien la signification hydrodynamique d'une densité de masse propre.

Le tenseur des tensions internes est :

$$\theta_{\mu\nu} = \rho \mu'_0 u_\mu u_\nu - \delta_{\mu\nu} (\mu_0 - \rho \mu'_0) c^2 - \mu_0 u_\mu u_\nu = c^2 (\rho \mu'_0 - \mu_0) \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) \equiv \eta_{\mu\nu} c^2 (\rho \mu'_0 - \mu_0).$$

Il est bien orthogonal au courant, et l'on voit qu'il a l'expression du tenseur des tensions pour un fluide *parfait* dont la pression est exprimée par :

$$\pi = (\rho \mu'_0 - \mu_0) c^2$$

On voit que dans un fluide parfait à équation d'état, il existe une relation entre la pression et les variations de la densité de masse en fonction de la densité de matière, ce qui est raisonnable, puisque les

variations de la densité de masse au cours du mouvement dépendent essentiellement de la pression, elle-même liée à la densité de matière par l'équation d'état. En fait, si on exprime cette variation à partir de l'équation de conservation de $t_{\mu\nu}$, on a :

$$\left(\mu_0 + \frac{\pi}{c^2}\right) \dot{u}_\mu + \dot{\mu}_0 u_\mu + \frac{\dot{\pi}}{c^2} u_\mu + \partial_\mu \pi = 0$$

soit, en contractant par u_μ :

$$-\dot{\mu}_0 c^2 = \dot{\pi} - u_\mu \partial_\mu \pi = \partial_\mu (u_\mu \pi) - u_\mu \partial_\mu \pi = \pi \partial_\mu u_\mu.$$

Si on exprime que μ_0 est fonction uniquement de ρ , on aura :

$$\dot{\mu}_0 = \partial_\mu (u_\mu \mu_0) = u_\mu \partial_\mu \mu_0 + \mu_0 \partial_\mu u_\mu = u_\mu \mu'_0 \partial_\mu \rho + \mu_0 \partial_\mu u_\mu.$$

Ou, en tenant compte de : $\partial_\mu (u_\mu \rho) = 0$

$$\dot{\mu}_0 = -\rho \mu'_0 \partial_\mu u_\mu + \mu_0 \partial_\mu u_\mu.$$

Ainsi l'équation de variation de la masse devient :

$$\rho \mu'_0 c^2 \partial_\mu u_\mu - \mu_0 c^2 \partial_\mu u_\mu = \pi \partial_\mu u_\mu.$$

Ou, en divisant par le scalaire $\partial_\mu u_\mu$:

$$(\rho \mu'_0 - \mu_0) c^2 = \pi$$

c'est bien l'équation trouvée.

Nous pouvons introduire la densité de pseudomasse de M. Lichnerowicz (voir Appendice B) en posant :

$$t_{\mu\nu} = \mu u_\mu u_\nu + \delta_{\mu\nu} \pi.$$

D'où :

$$\mu = \mu_0 + \frac{\pi}{c^2} = \rho \mu'_0.$$

Le champ de forces internes est alors :

$$K_\alpha = -\frac{\partial_\alpha \pi}{\mu} = -\frac{c^2 \partial_\alpha (\rho \mu'_0 - \mu_0)}{\rho \mu'_0} = c^2 \left[\frac{\partial_\alpha \mu_0}{\rho \mu'_0} - \partial_\alpha \text{Log} (\rho \mu'_0) \right]$$

Et comme on peut écrire : $\partial_\alpha \mu_0 = \mu'_0 \partial_\alpha \rho$

$$K_\alpha = -c^2 \partial_\alpha [\text{Log} (\rho \mu'_0) - \text{Log} \rho] = -c^2 \partial_\alpha \text{Log} \mu'_0.$$

Enfin l'indice du fluide est donné par :

$$K_\alpha = -c^2 \partial_\alpha \text{Log} F$$

si bien qu'on a simplement :

$$F = C \mu'_0.$$

On peut prendre comme exemple de fluides de ce type le « gaz parfait » caractérisé par une équation d'état :

$$\begin{aligned}\pi &= Kc^2\mu_0 & (\text{loi de Mariotte}) \\ K\mu_0 &= \rho\mu'_0 - \mu_0 & \text{ce qui donne :} \\ \frac{d\mu_0}{\mu_0} &= (K+1) \frac{d\rho}{\rho} & \mu_0 = C\rho^{K+1}\end{aligned}$$

On voit que si la constante de couplage K tend vers zéro, on arrive au cas matière pure avec : $\mu_0 = \rho\mathcal{M}_0$.

La constante d'intégrations C peut donc être prise égale à la masse particulaire $\mathcal{M}_0$. Mais elle en diffère dans le cas général où $K \neq 0$.

La densité de pseudomasse est alors :

$$\mu = \rho\mu'_0 = (K+1)\mu_0.$$

Le tenseur d'énergie-impulsion est :

$$t_{\mu\nu} = (K+1)Cu_\mu u_\nu + \delta_{\mu\nu}Kc^2\mu_0.$$

On en tire facilement l'équation différentielle aux lignes de courant :

$$\dot{u}_\mu = -Kc^2\left(\delta_{\alpha\mu} + \frac{u_\alpha u_\mu}{c^2}\right)\partial_\alpha \text{Log } \rho \equiv -\eta_{\alpha\mu}Kc^2\partial_\alpha \text{Log } \rho$$

Elle ne met en jeu que le gradient de la densité de *matière*.

§ 3. Formulation lagrangienne du fluide matière pure à spin.

Nous allons étendre ces considérations au cas d'un fluide doté d'une densité de moment angulaire interne d'après un travail récent de Takabayasi (*) et de Vigier et Unal (52). Rappelons que Frenkel s'était déjà efforcé de donner une formulation lagrangienne à la dynamique du corpuscule tournant et que, faute d'avoir utilisé les variables adaptées à la représentation des rotations, son lagrangien n'était pas une intégrale exacte (notre chapitre I). Les variables qui conviennent ici sont les tétrapodes (Vierbeine) d'Einstein et Kramer utilisés aussi récemment pour la représentation du champ de Dirac (49, 53, 54). On attache en chaque point du fluide un système de quatre vecteurs unitaires et orthogonaux $a_\mu^1, a_\mu^2, a_\mu^3, a_\mu^4$. On suppose que chacun d'eux s'exprime au moyen des trois autres par la formule :

$$(V-4) \quad a_\mu^\xi = \epsilon^{\xi\eta\zeta\iota}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}a_\nu^\eta a_\alpha^\zeta a_\beta^\iota$$

Les lettres grecques supérieures indiquent ici les numéros des vecteurs.

(*) Manuscrit communiqué par l'auteur.

Elles varient de 1 à 4 et la formule ci-dessus oriente le tétrapode. Ainsi on a :

$$a_{\mu}^1 = \varepsilon_{\mu\nu\pi\beta} a_{\nu}^2 a_{\alpha}^3 a_{\beta}^4$$

mais :

$$a_{\mu}^4 = - \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} a_{\nu}^1 a_{\alpha}^2 a_{\beta}^3.$$

La formule (4) permet d'établir les relations entre les différents bivecteurs du tétrapode, ainsi :

$$(V-5) \quad \varepsilon_{\pi\beta\mu\nu} a_{\mu}^3 a_{\nu}^4 = a_{\alpha}^1 a_{\beta}^2 - a_{\alpha}^2 a_{\beta}^1.$$

On voit que si on contracte (4) par un des quatre vecteurs, soit a_{μ}^x on obtient : si $x = \xi$ le module : $a_{\mu}^{\xi} a_{\mu}^{\xi} = 1 = \text{Dét. } ||a_{\mu}^{\xi}||$ et si $x \neq \xi$: zéro, a_{μ}^{ξ} et a_{μ}^x étant orthogonaux, ce que la formule montre en raison de l'antisymétrie de $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$.

On a donc :

$$(V-6) \quad a_{\mu}^{\xi} a_{\mu}^{\eta} = \delta^{\xi\eta}$$

La formule (4) multipliée par a_{λ}^{ξ} avec sommation sur ξ , montre de même que :

$$(V-7) \quad a_{\mu}^{\xi} a_{\lambda}^{\xi} = \delta_{\mu\lambda}$$

relation qui était moins évidente.

Nous choisirons de choisir : $a_{\mu}^4 = \frac{u_{\mu}}{ic}$ colinéaire au courant, et : $a_{\mu}^3 = \frac{\sigma_{\mu}}{\rho h_0}$ colinéaire au spin.

(σ_{μ} désigne ici la densité de spin, alors que h_0 représente le module du spin *particulaire*). Cette hypothèse est toujours possible, le spin étant essentiellement orthogonal au courant. Quant aux deux autres vecteurs, leur choix est lié, dans les travaux actuels, à la représentation des fonctions d'onde au moyen de spineurs ⁽⁵³⁾. Nous ne la précisons pas. Mais tout couple de vecteurs liés à la particule dans l'espace propre et orthogonaux au spin, semble pouvoir convenir. Le choix de a_{μ}^3 et a_{μ}^4 nous permet d'exprimer la densité de moment angulaire (voir chapitre III) par :

$$s_{\mu\nu} = - \rho h_0 \varepsilon_{\mu\nu\pi\beta} a_{\alpha}^1 a_{\beta}^3$$

On a aussi immédiatement d'après (5) :

$$s_{\mu\nu} = - \rho h_0 (a_{\mu}^1 a_{\nu}^2 - a_{\nu}^1 a_{\mu}^2).$$

Le mouvement de ces vecteurs va nous permettre de caractériser la rotation en chaque point. Considérons d'abord une particule dans son système propre. Si le spin est fixe (nous savons que c'est le cas pour la particule libre de Weyssenhoff), la rotation des vecteurs a_{μ}^1 , a_{μ}^2 carac-

térise la « rotation propre ». Les vitesses $\dot{a}_k^1$ et $\dot{a}_k^2$ sont égales, orthogonales et situées dans le plan $a_k^1 a_k^2$. On sait que le vecteur vitesse angulaire d'espace sera alors colinéaire au spin, et, $\vec{a}^1$ et $\vec{a}^2$ étant unitaires, sera donné par le produit vectoriel $\vec{a}^1 \times \vec{a}^2$, ou tout aussi bien par $\vec{a}^2 \times \vec{a}^1$. Ainsi :

$$\omega_i = \epsilon_{ijk} \dot{a}_j^1 a_k^1 = \epsilon_{ijk} \dot{a}_j^2 a_k^2 = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\dot{a}_j^1 a_k^1 + \dot{a}_j^2 a_k^2).$$

Si le spin n'est pas fixe, la vitesse de l'extrémité de $\vec{a}^3$ va décrire la précession de l'axe de rotation propre. Les deux termes précédents cesseront d'être coplanaires et égaux, et un terme $\vec{a}^3 \times \vec{a}^3$ viendra s'y ajouter :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\dot{a}_j^1 a_k^1 + \dot{a}_j^2 a_k^2 + \dot{a}_j^3 a_k^3).$$

On peut enfin ajouter un terme semblable $\dot{a}_j^4 a_k^4$, le vecteur $\dot{a}^4$ étant nul dans le système propre. On a donc :

$$(\omega_i)^0 = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\dot{a}_j^{\xi} a_k^{\xi})^0 \quad (\text{somme sur } \xi).$$

On sait que le vecteur vitesse angulaire est un vecteur axial, dual d'un tenseur antisymétrique, ce qui apparaît bien sur la formule ci-dessus. Au point de vue tensoriel, c'est ce dernier lui-même qu'il faut utiliser. On posera donc :

$$(\omega_{jk})^0 = \frac{1}{2} (\dot{a}_j^{\xi} a_k^{\xi} - a_j^{\xi} \dot{a}_k^{\xi})^0.$$

Cette expression peut être rendue covariante du point de vue relativiste en introduisant dans le système propre les composantes homologues :

$$(\omega_{j4})^0 = \frac{1}{2} (\dot{a}_j^{\xi} a_4^{\xi} - a_j^{\xi} \dot{a}_4^{\xi})^0.$$

Comme d'après (7) :

$$a_j^{\xi} a_4^{\xi} = 0.$$

On peut remplacer

$$a_j^{\xi} \dot{a}_4^{\xi} \text{ par } -\dot{a}_j^{\xi} a_4^{\xi}$$

d'où :

$$(\omega_{j4})^0 = (\dot{a}_j^{\xi} a_4^{\xi})^0.$$

Sous cette forme, la signification des composantes de temps dans le système propre apparaît immédiatement. En effet, pour : $\xi = 1, 2, 3$ les composantes a_4^{ξ} sont nulles. Il ne reste donc que le terme :

$$(\dot{a}_j^{\xi} a_4^{\xi})^0 = (\dot{a}_j^{\xi})^0 = \frac{1}{ic} \dot{u}_j^{\xi} = \frac{1}{ic} \left(\frac{dv_j}{dt} \right)^0.$$

Ainsi, dans le système propre, les composantes d'espace du tenseur

$\omega_{\mu\nu}$ représentent le tenseur vitesse angulaire ordinaire, et les composantes de temps représentent l'accélération linéaire du corpuscule. On posera donc de façon covariante :

$$\omega_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (\dot{a}_{\mu}^{\xi} a_{\nu}^{\xi} - a_{\mu}^{\xi} \dot{a}_{\nu}^{\xi}) .$$

Pour former le lagrangien relatif à cette rotation généralisée, on s'inspire de la formule classique donnant l'énergie non-relativiste d'un corps en rotation dans l'espace, soit : $T = \frac{1}{2} I_{[ij]} \omega_i \omega_j$.

$I_{[ij]}$ est le « tenseur d'inertie », généralisant la notion élémentaire de moment d'inertie. Du point de vue relativiste, comme la vitesse angulaire est un tenseur, on doit introduire un tenseur d'inertie du quatrième ordre et écrire :

$$T = \frac{1}{2} I_{[\alpha\beta][\mu\nu]} \omega_{[\alpha\beta]} \omega_{[\mu\nu]} .$$

De même qu'on définit le moment cinétique non relativiste par $I_{[ij]} \omega_j$ nous identifierons le tenseur moment angulaire interne avec $I_{[\alpha\beta][\mu\nu]} \omega_{[\alpha\beta]}$ et nous écrirons l'énergie : $T = \frac{1}{2} s_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$.

Le lagrangien de rotation propre sera donc :

$$- \frac{1}{2} \rho h_0 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a_{\alpha}^{\xi} a_{\beta}^{\xi} \cdot \frac{1}{2} (\dot{a}_{\mu}^{\xi} a_{\nu}^{\xi} - a_{\mu}^{\xi} \dot{a}_{\nu}^{\xi})$$

ou, en tenant compte de (7) :

$$\frac{1}{2} \rho h_0 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a_{\alpha}^{\xi} a_{\beta}^{\xi} (\dot{a}_{\mu}^{\xi} a_{\nu}^{\xi})$$

On remarquera que, pour $\xi = 3$ ou 4 , l'expression s'annule par antisymétrie. Il reste : $\frac{1}{2} \rho h_0 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a_{\alpha}^3 a_{\beta}^4 (\dot{a}_{\mu}^4 a_{\nu}^3 + \dot{a}_{\mu}^3 a_{\nu}^4)$.

Mais nous savons que : $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a_{\alpha}^3 a_{\beta}^4 a_{\nu}^4 = - a_{\mu}^4$
et que $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a_{\alpha}^3 a_{\beta}^4 a_{\nu}^3 = + a_{\mu}^3$.

Le lagrangien devient ainsi :

$$\frac{1}{2} \rho h_0 (a_{\mu}^4 \dot{a}_{\mu}^3 - a_{\mu}^3 \dot{a}_{\mu}^4) = \rho h_0 i c a_{\lambda}^4 a_{\mu}^3 \partial_{\lambda} a_{\mu}^3 .$$

Pour former le lagrangien total, nous introduirons, comme dans le cas classique, l'énergie propre qui est ici : $\rho \mathcal{N}_0 c^2$ et deux termes de Lagrange.

Le premier — $ic\rho a_\mu^4 \delta_\mu S$, pour assurer la relation de conservation :

$$\dot{\rho} = \partial_\mu (\rho u_\mu) = 0$$

le second : $\lambda_{\mu\nu} (a_\mu^\xi a_\nu^\xi - \delta_{\mu\nu})$ qui remplace et généralise le terme classique $\lambda(u_\mu u_\mu + c^2)$ et qui fournit pour les quatre vecteurs du tétrapode les conditions d'unitarité et d'orthogonalité exprimées par les relations (7). Les quantités $\partial_\mu S$ et $\lambda_{\mu\nu}$ — qui est évidemment *symétrique* en μ et ν — sont des multiplicateurs de Lagrange.

On a ainsi :

$$\mathcal{L} = \rho \mathcal{M}_0 c^2 + ic\rho a_\mu^4 \delta_\mu S + ic\rho h_0 a_\mu^4 a_\lambda^4 \partial_\mu a_\lambda^2 + \lambda_{\mu\nu} (a_\mu^\xi a_\nu^\xi - \delta_{\mu\nu}) .$$

Nous supposons que la masse propre particulière $\mathcal{M}_0$ est constante.

Nous commencerons par chercher le tenseur de Belinfante $f_{[\mu\nu]\lambda}$. Il ne fait intervenir que le troisième terme, le seul à contenir le gradient $\partial_\mu a_\lambda^2$ susceptible de variations au cours d'une transformation de Lorentz.

On a : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{\alpha,\lambda}^2} = ic\rho h_0 a_\lambda^4 a_\alpha^4$.

Comme il s'agit d'un vecteur, l'opérateur des rotations infinitésimales est :

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu})$$

et on a ainsi :

$$\begin{aligned} f_{[\mu\nu]\lambda} &= ic\rho h_0 a_\lambda^4 a_\alpha^4 \cdot \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} a_\beta^2 \\ &= \frac{1}{2} ic\rho h_0 a_\lambda^4 (a_\mu^4 a_\nu^2 - a_\nu^4 a_\mu^2) . \end{aligned}$$

On sait que le moment angulaire propre se tire de $f_{\mu\nu\lambda}$ par :

$$f_{\mu\nu\lambda} u_\lambda = -\frac{1}{2} c^2 s_{\mu\nu} .$$

Cela donne ici : $s_{\mu\nu} = \rho h_0 (a_\mu^4 a_\nu^2 - a_\nu^4 a_\mu^2)$.

C'est bien celui que nous avons posé au commencement. On voit que le tenseur $f_{\mu\nu\lambda}$ se réduit au terme $s_{\mu\nu} u_\lambda$. On n'aura pas de transformation de jauge à effectuer.

Dérivons maintenant le lagrangien par rapport aux différentes variables. Outre les deux conditions de Lagrange :

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{et} \quad a_\mu^\xi a_\nu^\xi = \delta_{\mu\nu}$$

nous obtiendrons en dérivant par rapport à ρ :

$$(V-8) \quad \mathcal{M}_0 c^2 + ic a_\mu^4 \partial_\mu S + ic h_0 a_\mu^4 a_\lambda^4 \partial_\mu a_\lambda^2 = 0$$

soit :

$$\dot{S} = -\mathcal{M}_0 c^2 - h_0 a_\lambda^4 \dot{a}_\lambda^2.$$

Il résulte de cette relation que le lagrangien est nul : $\mathcal{L} = 0$.
En dérivant par rapport à a_μ^4 :

$$(V-9) \quad \rho h_0 \dot{a}_\mu^2 + 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^4 = 0.$$

En dérivant par rapport à a_μ^2 :

$$\partial_\lambda (ic\rho h_0 a_\lambda^4 a_\mu^4) = 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^2$$

soit :

$$(V-10) \quad -\rho a_\mu^4 \dot{h}_0 - \rho h_0 \dot{a}_\mu^4 + 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^2 = 0.$$

En dérivant par rapport à a_μ^3 :

$$(V-11) \quad 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^2 = 0.$$

Enfin, en dérivant par rapport à a_μ^4 :

$$(V-12) \quad ic\rho \partial_\mu S + ic\rho h_0 a_\lambda^4 \partial_\mu a_\lambda^2 + \lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^4 = 0.$$

Pour utiliser la relation d'orthonormalité, multiplions (9), (10), (11), (12) respectivement par a_ν^4 , a_ν^2 , a_ν^3 , a_ν^4 et ajoutons :

$$-\rho h_0 a_\mu^2 a_\mu^4 + \rho h_0 (a_\nu^4 \dot{a}_\mu^2 - a_\nu^2 \dot{a}_\mu^4) + ic\rho (a_\nu^4 \partial_\mu S + h_0 a_\nu^4 a_\lambda^4 \partial_\mu a_\lambda^2) + 2\lambda_{\mu\alpha} \delta_{\nu\alpha} = 0.$$

Si nous échangeons μ et ν et que nous retranchions l'équation obtenue de la précédente, le dernier terme disparaîtra en raison de la symétrie de $\lambda_{\mu\nu}$ et il restera :

$$(V-13) \quad \rho h_0 (a_\nu^4 a_\mu^2 - a_\mu^4 a_\nu^2) + \rho h_0 (a_\nu^4 \dot{a}_\mu^2 - a_\mu^4 \dot{a}_\nu^2 - a_\nu^2 \dot{a}_\mu^4 + a_\mu^2 \dot{a}_\nu^4) + ic\rho (a_\nu^4 \partial_\mu S - a_\mu^4 \partial_\nu S) + ic\rho h_0 a_\lambda^4 (a_\nu^4 \partial_\mu a_\lambda^2 - a_\mu^4 \partial_\nu a_\lambda^2) = 0$$

Les deux premiers termes sont simplement la dérivée du moment angulaire interne $\dot{s}_{\nu\mu}$. Si nous contractons cette relation par a_μ^4 :

$$\dot{s}_{\nu\mu} a_\mu^4 + ic\rho (a_\nu^4 a_\mu^4 \partial_\mu S - \partial_\nu S) + ic\rho h_0 a_\lambda^4 (a_\nu^4 a_\mu^4 \partial_\mu a_\lambda^2 - \partial_\nu a_\lambda^2) = 0.$$

Ce qui se transforme aisément en :

$$-s_{\nu\mu} \dot{a}_\mu^4 + \rho (a_\nu^4 \dot{S} - ic\partial_\nu S) + \rho h_0 a_\lambda^4 (a_\nu^4 \dot{a}_\lambda^2 - ic\partial_\nu a_\lambda^2) = 0$$

soit, en tenant compte de (8) :

$$-s_{\nu\mu} \dot{a}_\mu^4 - \rho (a_\nu^4 \mathcal{M}_0 c^2 + a_\nu^4 h_0 a_\lambda^4 \dot{a}_\lambda^2 + ic\partial_\nu S) + \rho h_0 a_\lambda^4 (a_\nu^4 \dot{a}_\lambda^2 - ic\partial_\nu a_\lambda^2) = 0$$

ce qui fournit l'expression de $\partial_\nu S$:

$$(V-14) \quad ic\rho \partial_\nu S = -\rho a_\nu^4 \mathcal{M}_0 c^2 - ic\rho h_0 a_\lambda^4 \partial_\nu a_\lambda^2 - s_{\nu\lambda} \dot{a}_\lambda^4.$$

Nous pouvons maintenant former le tenseur d'énergie-impulsion. Il se compose de deux parties :

$$1) \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta S_{,\nu}} \partial_\mu S = ic \rho a_\nu^\dagger \partial_\mu S$$

soit, en tenant compte de (14) :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta S_{,\nu}} \partial_\mu S &= -\rho \mathcal{N}_0 c^2 a_\lambda^\dagger a_\mu^\dagger - ic \rho h_0 a_\lambda^\dagger a_\nu^\dagger \partial_\mu a_\lambda^2 - s_{\mu\lambda} \dot{a}_\lambda^\dagger a_\nu^\dagger \\ &= \rho \mathcal{N}_0 u_\mu u_\nu - ic \rho h_0 a_\lambda^\dagger a_\nu^\dagger \partial_\mu a_\lambda^2 + \frac{1}{c^2} s_{\mu\lambda} \dot{u}_\lambda u_\nu \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta a_{\lambda,\nu}^2} \partial_\mu a_\lambda^2 = ic \rho h_0 a_\nu^\dagger a_\lambda^\dagger \partial_\mu a_\lambda^2$$

ce qui annule le second terme de la première partie :

$$t_{\mu\nu} = \rho \mathcal{N}_0 u_\mu u_\nu + \frac{1}{c^2} s_{\mu\lambda} \dot{u}_\lambda u_\nu.$$

On voit que $t_{\mu\nu}$ comporte u_ν en facteur, ce qui est caractéristique d'un fluide *matière pure*. L'impulsion g_μ est donnée par :

$$g_\mu = \rho \mathcal{N}_0 u_\mu + \frac{1}{c^2} s_{\mu\lambda} \dot{u}_\lambda.$$

Elle a bien la forme que nous avons trouvée dans le cas de Weyssenhoff, avec un terme classique $\rho \mathcal{N}_0 u_\mu$ colinéaire au courant, et un terme transversal :

$$-p_\mu = \frac{1}{c^2} s_{\mu\lambda} \dot{u}_\lambda$$

La relation de conservation du tenseur $t_{\mu\nu}$ nous donne immédiatement $\dot{g}_\mu = 0$. La relation de conservation du moment de rotation total : $x_\mu t_{\nu\lambda} - x_\nu t_{\mu\lambda} + f_{\mu\nu\lambda}$ nous donne la deuxième équation :

$$\dot{s}_{\mu\nu} = g_\mu u_\nu - g_\nu u_\mu = p_\nu u_\mu - p_\mu u_\nu.$$

Elle peut, du reste, être obtenue directement en portant dans (13) la valeur (14) de $\partial_\mu S$.

§ 4. Goutte de Bohm et Vigier dans un champ de forces extérieur.

Notre intention étant de généraliser l'hydrodynamique du fluide de Weyssenhoff en introduisant des forces d'interaction entre les particules, nous allons partir du lagrangien précédent et nous le généralisons, d'une part en supposant que la masse propre $\mathcal{N}_0$ et le module du spin h_0 pour chaque particule peuvent être variables (généralisation de

la méthode qui nous a fourni le fluide parfait classique), d'autre part, en ajoutant des termes d'énergie supplémentaire. Mais pour être préparés à interpréter les résultats que nous obtiendrons ainsi, il nous faut d'abord étendre, au cas des corpuscules soumis à des forces extérieures, la dynamique générale du corpuscule tournant libre que nous avons élaborée dans nos premiers chapitres, et la rattacher ainsi à l'hydrodynamique des fluides à tensions internes que nous avons déjà rencontrée dans le cas des fluides représentatifs des fonctions d'ondes quantiques. Il nous faut pour cela reprendre les considérations de notre chapitre II sur le modèle de la goutte de Bohm-Vigier.

La théorie de la goutte dans un champ de force extérieur est beaucoup moins satisfaisante que celle de la goutte libre. Nous désirerions parvenir à une formulation analogue à celle de la dynamique relativiste classique du point matériel, c'est-à-dire définir d'abord — et de façon covariante — les grandeurs dynamiques globales caractérisant la goutte, puis exprimer les lois qui déterminent l'évolution de ces grandeurs par l'action des forces extérieures. Or, d'une part les raisonnements par lesquels nous avons démontré le caractère covariant de l'impulsion G_μ et du moment angulaire interne $S_{\mu\nu}$ tombent ici en défaut, car le tenseur d'énergie-impulsion et son moment ne sont plus conservatifs. D'autre part, il est impossible, comme l'a montré Möller ⁽³⁾ de séparer complètement les caractéristiques dynamiques du système et le champ extérieur. Celui-ci intervient obligatoirement dans la définition de celles-là. la *définition* de l'impulsion et du moment angulaire d'une goutte donnée ne sont pas les mêmes suivant le champ extérieur auquel cette goutte est soumise.

Nous introduirons nos définitions en veillant à ce qu'en l'absence de force, on retombe sur les résultats de l'étude précédente.

Nous supposerons encore que le fluide est classique, c'est-à-dire que son tenseur d'énergie-impulsion est symétrique et vérifie la relation :

$$t_{\mu\nu}u_\nu = ku_\mu.$$

Les équations hydrodynamiques locales seront :

(V-15)

$$\partial_\nu t_{\mu\nu} = f_\mu$$

(V-16)

$$\partial_\lambda m_{\mu\nu\lambda} = x_\mu f_\nu - x_\nu f_\mu.$$

f_μ étant la densité de force extérieure. Il est visible que la seconde équation est une conséquence de la première et de la symétrie de $t_{\mu\nu}$. Comme dans l'exposé précédent, nous considérerons un centre intrinsèque C de la goutte, animé d'une vitesse unitaire U_μ , nous réservant d'examiner

séparées par un intervalle infinitésimal de temps propre $\delta\tau$. En découplant la portion de l'hyperplan Π occupée par la matière en domaines élémentaires tels que $d\sigma_\mu$ de centre M, il est visible que le domaine $\delta\Omega$ se compose d'hypertubes élémentaires de section $d\sigma_\mu$ et de longueur $\delta l(M)$.

Si le mouvement de C était rectiligne et uniforme, les hyperplans Π et Π' seraient parallèles et δl serait le même pour tous les points M. Mais en général la ligne d'univers de C est courbe, sa vitesse unitaire U_μ n'est pas constante et les hyperplans Π et Π' ont une certaine « inclinaison » que la figure ci-contre représente symboliquement par un angle $\delta\alpha$. Il est visible, dès lors, qu'en un point tel que M on a à considérer une longueur telle que : $MM' = MM'' + M''M'$ où $M''M' = \delta l(C)$ et $MM'' = \overline{CM}\delta\alpha$, si $\delta\alpha$ est petit.

Si on considère le problème à deux dimensions illustré par la figure, où le point C est supposé décrire la courbe $\mathcal{L}$ avec une vitesse de module constant ν , on a :

$$\delta l_{(M)} = \delta l_{(C)} + \overline{CM}\delta\alpha \quad \text{où} \quad \delta l_{(C)} = \nu\delta t$$

et où $\delta\alpha$ est donné par la formule classique de cinématique élémentaire :

$$\delta\alpha = \frac{\gamma}{\nu}\delta t. \quad \text{soit} \quad \delta l_{(M)} = \left(\nu + \overline{CM}\frac{\gamma}{\nu}\right)\delta t.$$

Du reste, l'accélération γ étant colinéaire au vecteur $\mathbf{CM}$ et de sens contraire (dans le cas de la figure), il est visible qu'on peut écrire :

$\delta l = \left(\nu - \frac{\mathbf{CM} \cdot \gamma}{\nu}\right)\delta t$ et que pour δt très petit, cette formule se confond avec la formule vectorielle : $\delta l = v_{(C)}\delta\tau\left(1 - \frac{\mathbf{CM} \cdot \gamma}{v_{(C)}^2}\right)$.

Sous cette forme, la formule s'étend sans modification au cas de l'espace, c'est-à-dire aux points M qui ne sont pas dans le plan perpendiculaire par C au dièdre $\Pi \Pi'$ (plan de la figure), et également à l'univers relativiste. Dans ce dernier cas, le module constant de la vitesse de C est ic et on a :

$$\delta l_\nu = U_\nu\delta\tau \left[1 - \frac{(x_\mu - Y_\mu)\dot{U}_\mu}{c^2}\right] = U_\nu\delta\tau \left(1 + \frac{x_\mu - Y_\mu}{c^2}\dot{U}_\mu\right)$$

en appelant Y_μ les coordonnées du point C et en supposant que dans le système propre les points C et M sont simultanés : $x_\mu^0 = Y_\mu^0$ ou : $(x_\mu - Y_\mu)U_\mu = 0$.

Pour simplifier, nous poserons : $1 + \frac{x_\mu - Y_\mu}{c^2} \dot{U}_\mu = \gamma_{(x)}$ et nous remarquerons qu'on peut aussi écrire :

$$\gamma = 1 + \frac{x_\mu - Y_\mu}{c^2} \dot{U}_\mu = 1 - \frac{\dot{x}_\mu - \dot{Y}_\mu}{c^2} U_\mu = - \frac{\dot{x}_\mu U_\mu}{c^2}$$

puisque :

$$\dot{Y}_\mu = U_\mu.$$

Enfin, en évaluant γ dans le système propre :

$$\gamma = - \frac{ic}{c^2} \dot{x}_4^0 = \dot{x}_4^0 \otimes.$$

Ainsi, lorsque l'on considère pour tous les points de la goutte le même intervalle $\delta\tau$ du *temps propre du point C*, on a pour chaque point un élément d'univers :

$$d\omega = \gamma_{(x)} U_\mu d\sigma_\mu \delta\tau,$$

différentielle scalaire qu'on peut exprimer dans le système propre, où on n'a à considérer que les composantes :

$$U_4^0 = ic \quad d\sigma_4^0 = ic d\nu_0$$

On a finalement :

$$d\omega = -c^2 \gamma(x) d\nu_0 \delta\tau = -c^2 \left[1 + \frac{x_\mu - Y_\mu}{c^2} \dot{U}_\mu \right] d\nu_0 \delta\tau.$$

Moyennant cette expression qui relie les uns aux autres les éléments d'univers relatifs aux différents points de la goutte, on voit que dans toute intégrale étendue au domaine d'univers $\delta\Omega$, $\delta\tau$ se met en facteur et on n'a plus qu'à prendre une intégrale d'hypercloison, c'est-à-dire qu'on se trouve ramené à une intégrale de volume propre.

Intégrons suivant ce principe sur le domaine $\delta\Omega$ la première équation hydrodynamique : $\partial_\nu t_{\mu\nu} = f_\mu$.

Au premier membre, on a :

$$\int_{\delta\Omega} \partial_\nu t_{\mu\nu} d\omega = \int_{\Pi_0} t_{\mu\nu} d\sigma_\nu - \int_{\Pi_0} t_{\mu\nu} d\sigma_\nu = \frac{d}{d\tau} \left(\int_{\Sigma_0} t_{\mu\nu} d\sigma_\nu \right) \delta\tau = -c^2 \dot{G}_\mu \delta\tau.$$

Il est à remarquer que nous avons supposé nul le terme d'hyperparoi. Nous savons que cela revient à postuler l'existence à la surface de la goutte, de tensions superficielles convenables. Il est visible, d'ailleurs, que ces tensions dépendront de la force extérieure, dont on doit tenir compte dans l'équation d'équilibre d'un élément de surface.

Le second membre de l'équation donne :

$$\int_{\delta\Omega} f_\mu d\omega = -c^2 \delta\tau \int_{\Sigma_0} f_\mu \gamma_{(x)} d\nu_0.$$

Nous pouvons alors poser par définition comme expression de la *force globale* :

$$F_{\mu} = \int_{\Sigma_0} f_{\mu} \left[1 + \frac{x_{\nu} - Y_{\nu}}{c^2} \dot{U}_{\nu} \right] d\nu_0 .$$

On voit que cette expression se réfère à une coupe particulière du tube par l'hyperplan d'espace *propre*. Mais une fois cette coupe définie, F_{μ} est un vecteur d'univers. Moyennant cette hypothèse, on a comme première équation dynamique globale :

$$\dot{G}_{\mu} = F_{\mu}$$

soit l'équation classique (notons toutefois que G_{μ} n'est en général pas colinéaire à U_{μ}).

Il est facile d'intégrer de la même façon l'équation des couples :

$$\partial_{\lambda} m_{\mu\nu\lambda} = x_{\mu} f_{\nu} - x_{\nu} f_{\mu} .$$

Nous introduirons une densité de moment de rotation *interne* $s_{\mu\nu\lambda}$ en prenant le moment de $t_{\mu\nu}$ par rapport au centre C de la goutte, et nous définirons encore le moment angulaire interne de la goutte par l'intégrale :

$$S_{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_0} s_{\mu\nu\lambda} d\sigma_{\lambda} .$$

On a alors au premier membre :

$$\int_{\delta\Omega} \partial_{\lambda} m_{\mu\nu\lambda} = -c^2 \delta\tau \dot{M}_{\mu\nu}$$

Or :

$$M_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_0} (Y_{\mu} t_{\nu\lambda} - Y_{\nu} t_{\mu\lambda}) d\sigma_{\lambda}$$

d'où :

$$\dot{M}_{\mu\nu} = \dot{S}_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \left[\dot{Y}_{\mu} \int t_{\nu\lambda} d\sigma_{\lambda} - \dot{Y}_{\nu} \int t_{\mu\lambda} d\sigma_{\lambda} \right] + Y_{\mu} \frac{d}{d\tau} \int t_{\nu\lambda} d\sigma_{\lambda} - Y_{\nu} \frac{d}{d\tau} \int t_{\mu\lambda} d\sigma_{\lambda}$$

soit :

$$\dot{M}_{\mu\nu} = \dot{S}_{\mu\nu} + U_{\mu} G_{\nu} - U_{\nu} G_{\mu} + Y_{\mu} \dot{G}_{\nu} - Y_{\nu} \dot{G}_{\mu}$$

ou, en tenant compte de la première équation :

$$-c^2 \delta\tau \dot{M}_{\mu\nu} = -c^2 \delta\tau (\dot{S}_{\mu\nu} + U_{\mu} G_{\nu} - U_{\nu} G_{\mu}) + Y_{\mu} \int_{\delta\Omega} f_{\nu} d\omega - Y_{\nu} \int_{\delta\Omega} f_{\mu} d\omega$$

On peut faire passer les deux derniers termes dans le second membre qui devient alors :

$$\int_{\delta\Omega} [(x_{\mu} - Y_{\mu}) f_{\nu} - (x_{\nu} - Y_{\nu}) f_{\mu}] d\omega = -c^2 \delta\tau \int_{\Sigma_0} [(x_{\mu} - Y_{\mu}) f_{\nu} - (x_{\nu} - Y_{\nu}) f_{\mu}] \gamma_{(x)} d\nu_0$$

On définit alors le *couple global* par :

$$\Gamma_{\mu\nu} = \int_{\Sigma_0} [(x_\mu - Y_\mu)f_\nu - (x_\nu - Y_\nu)f_\mu] \left[1 + \frac{x_\lambda - Y_\lambda}{c^2} \dot{U}_\lambda \right] d\nu_0$$

et on a ainsi la seconde équation dynamique :

$$\dot{S}_{\mu\nu} + G_\nu U_\mu - G_\mu U_\nu = \Gamma_{\mu\nu}$$

qui généralise la seconde équation de Frenkel-Weyssenhoff.

Il est important de remarquer, en considérant les expressions définissant la force F_μ et le couple $\Gamma_{\mu\nu}$ agissant globalement sur la goutte, que ni l'une ni l'autre ne se trouve en général dans l'espace propre. Même si le champ extérieur agit de façon à produire en chaque point de la goutte une densité de force f_μ orthogonale au courant *local* — ce qui est le cas pour le champ électromagnétique et l'hypothèse qu'on fait généralement en hydrodynamique classique — les intégrales de cette force et de son moment sur tout le volume de la goutte n'auront aucune raison d'être orthogonales à la vitesse unitaire *du centre de matière* qui définit le système propre global. C'est là une différence importante, et qu'il ne faudra pas perdre de vue, entre notre dynamique du corpuscule tournant et celle du corpuscule classique de Newton. Pour ce dernier, en effet, la masse propre est constante. L'équation de la dynamique : $\dot{G}_\mu = F_\mu$ s'écrit $\dot{\mathcal{M}}_0 \dot{U}_\mu = F_\mu$ d'où, par contraction par U_μ : $F_\mu U_\mu = 0$.

Dans le cas du corpuscule tournant, au contraire on aura :

$$\dot{G}_\mu U_\mu = -\dot{\mathcal{M}}_0 c^2 - G_\mu \dot{U}_\mu.$$

Nous verrons que nous serons amenés à nous limiter aux cas où G_μ est orthogonal à $\dot{U}_\mu$, mais il restera : $F_\mu U_\mu = -\dot{\mathcal{M}}_0 c^2$.

En effet, la masse d'inertie de la goutte est en général variable et sa variation est égale à la composante de temps de F_μ dans le système propre, c'est-à-dire au *travail* effectué par la force. La variabilité de la masse propre est liée à l'existence de nombreux degrés de liberté internes que nous avons attribués explicitement à notre corpuscule en le dotant d'une structure étendue, et qui permettent au travail de la force d'avoir des effets autres que la pure et simple augmentation de l'énergie cinétique de translation (qui entre seule en ligne de compte pour le corpuscule classique). Ces effets — essentiellement des variations de l'énergie cinétique des mouvements *internes* de la matière de la goutte — se traduiront par des variations de la masse globale, même relativement au système propre, par rapport auquel l'énergie classique de translation

est constamment nulle par définition; il y aura variation de la masse *propre*.

Il nous reste à préciser la définition du point C. Naturellement, nous allons encore le définir comme un *centre de matière*, mais pour choisir le référentiel particulier où il sera pseudocentre de matière, le procédé employé dans le cas de la goutte libre nous est interdit. En effet le vecteur G_μ qui permettrait de définir sans ambiguïté le référentiel d'inertie, n'est plus défini de façon intrinsèque. Il présuppose lui-même le choix d'un centre de matière et d'un système propre. Möller a, du reste, montré que, tant qu'on ne considère que les propriétés du fluide, indépendamment du champ extérieur (non closed System), il est vain d'espérer définir un vecteur privilégié de façon covariante. Par contre, si on considère l'énergie-impulsion *totale*, y compris celle qui se manifeste par le champ extérieur, alors on se trouve de nouveau dans le cas d'application du théorème de Möller (general closed System). Il est alors possible de définir un vecteur impulsion *totale* $\mathcal{G}_\mu$ que nous distinguerons de l'impulsion G_μ qu'on peut appeler impulsion *interne* de la goutte.

Limitons-nous au cas d'un champ de force extérieure *holonôme*, c'est-à-dire dont la densité de force s'exprime par une divergence: $f_\mu = -\partial_\nu \tau_{\mu\nu}$.

Ce cas comprend celui d'un gradient relativiste: $f_\mu = -\partial_\mu V$ avec: $\tau_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} V$, ainsi que celui d'un champ électromagnétique $F_{[\alpha\beta]}$ régi par les équations de Maxwell: On a pour la densité de force de Lorentz:

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu \quad (j_\nu \text{ est la densité de courant électrique}).$$

Si on pose: $\tau_{\mu\nu} = F_{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ on obtient: $-\partial_\nu \tau_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} j_\nu$ si on tient compte des deux équations de Maxwell: $\partial_\nu F_{\mu\nu} = j_\mu$ et: $\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$.

Enfin lorsque nous constituerons des modèles de fluide avec des gouttelettes en interaction, c'est aussi de telles forces que nous serons amenés à introduire.

Dans tous ces cas l'équation hydrodynamique: $\partial_\nu t_{\mu\nu} = f_\mu$ prend la forme: $\partial_\nu (t_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) = 0$ qui fait apparaître un *tenseur d'énergie-impulsion total*: $\mathcal{T}_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}$ qui est conservatif. Dans ces conditions, et sous la restriction que le tenseur $\tau_{\mu\nu}$ soit nul à l'infini dans toute coupe du genre espace, on peut appliquer le raisonnement de Möller et définir une *impulsion totale*:

$$\mathcal{G}_\mu = \int_\infty \mathcal{T}_{\mu\otimes} d\nu$$

qui sera un *vecteur*, indépendamment de l'hyperplan d'espace sur lequel

on intègre, à condition que l'indice $\otimes$ se réfère à la composante de $\mathcal{C}_{\mu}$ sur l'axe des temps orthogonal à l'hyperplan considéré. En outre, le vecteur $\mathcal{G}_{\mu}$ est constant dans le temps.

La démonstration nécessite quelques précautions relatives aux intégrales d'hyperparoi. On peut décomposer l'intégrale de la divergence en deux parties : la partie relative au tenseur $t_{\mu\nu}$, soit $\int_{\infty} \partial_{\nu} t_{\mu\nu} d\omega$ qu'on étendra à deux domaines séparés : d'une part, au tube balayé par la goutte à l'intérieur duquel le théorème de Gauss s'applique sans difficulté, et pour lequel le terme de paroi est annulé par la présence de la tension superficielle; d'autre part, le reste de l'univers, où $t_{\mu\nu}$ est nul en tout point et où l'intégrale ne donne aucune contribution. Quant au terme $\int_{\infty} \partial_{\nu} \tau_{\mu\nu} d\omega$ il sera directement intégré sur l'univers entier. Le théorème de Gauss s'applique sans précaution spéciale, car la fonction $\tau_{\mu\nu}$ est continue et la disparition des termes de paroi résulte — comme dans le raisonnement original de Möller — de ce que l'hypersurface est rejetée à l'infini de l'espace, où $\tau_{\mu\nu}$ est nul en tout point. Il est à noter que, bien que $\mathcal{G}_{\mu}$ puisse aussi être décomposé en $\int_{\infty} t_{\mu\otimes} d\nu + \int_{\infty} \tau_{\mu\otimes} d\nu$ c'est seulement la somme qui est tensorielle. Une transformation de Lorentz, accompagnée du changement de coupe correspondant, transforme chacune des deux intégrales de façon non tensorielle, mais les écarts par rapport à la formule de Lorentz se compensent sur la somme, en raison du caractère conservatif du tenseur *total*.

Le vecteur impulsion totale exprime donc, dans une liaison indissoluble, l'énergie-impulsion de la matière et celle du champ, ce qui est conforme aux idées relativistes. Mais il nous fournit un référentiel privilégié, le *référentiel d'inertie* $\Pi_I \Lambda_I$ dans lequel ses composantes d'espace sont nulles, et qu'on peut exprimer relativement au référentiel du laboratoire où les composantes sont $\mathcal{G}_k$, $\mathcal{G}_4$, au moyen des formules que nous avons établies dans le cas de la goutte libre.

Ce référentiel nous servira à définir un pseudocentre de masse, qui pourra être exprimé comme point intrinsèque dans un référentiel quelconque. Ce sera le *centre de gravité* Z_{μ} . Il ne sera plus, comme celui de la goutte libre, au repos dans le référentiel $\Pi_I \Lambda_I$, ni même en mouvement uniforme. Bien entendu, l'énergie par laquelle nous pondérons chaque point de la goutte est uniquement celle de la matière :

$$Z_k^I \int_{\Sigma_I} t_{\otimes\otimes}^I d\nu^I = \int_{\Sigma_I} t_{\otimes\otimes}^I x_k^I d\nu^I$$

Comme les intégrales sont prises sur une coupe Σ_i par l'hyperplan d'espace d'inertie, nous ne pouvons pas rattacher, contrairement au cas de la goutte libre, les caractéristiques du centre de gravité aux composantes de l'impulsion *interne*, qui sont des intégrales prises sur des sections d'espace *propre*.

Mais surtout le référentiel d'inertie nous permettra de définir un pseudocentre de matière que nous prendrons comme *centre de matière* intrinsèque C, en calculant ses coordonnées dans un référentiel quelconque au moyen d'une transformation de Lorentz convenable. Les formules de transformation, ainsi que celles qui font passer au *système propre* attaché au point C, sont celles-là même que nous avons données à propos de la goutte libre, à condition de prendre comme G_k et $G_\otimes$ dans le système du laboratoire les composantes $\mathcal{G}_k$ et $\mathcal{G}_\otimes$ de l'impulsion *totale*. Nous pourrons alors prendre comme système propre le référentiel dans lequel C est au repos et effectuer dans ce référentiel des coupes de la goutte sur lesquelles nous prendrons les intégrales de volume définissant l'impulsion interne et le moment angulaire interne de la goutte.

On voit, comme nous l'avions annoncé, que le champ extérieur intervient, par l'intermédiaire du choix du référentiel d'inertie lié à l'impulsion totale $\mathcal{G}_\mu$, dans la définition des grandeurs dynamiques globales caractérisant la goutte. On remarquera qu'il peut se faire que l'énergie-impulsion de la goutte soit négligeable vis-à-vis de celle du champ, qui peut s'étendre très loin dans l'espace, si bien qu'en fait la direction privilégiée $\mathcal{G}_\mu$ pourra être pratiquement indépendante de la goutte, et le système d'inertie jouer pour elle le rôle d'une sorte de référentiel absolu. Il pourra aussi se faire qu'il y ait dans l'espace d'autres gouttes dont l'énergie-impulsion contribuera à la détermination du référentiel d'inertie, ou même — comme ce sera le cas dans les fluides de gouttelettes — que le champ soit créé uniquement par les forces exercées par ces autres gouttes. Dans ce dernier cas, le référentiel considéré jouera le rôle d'un référentiel collectif mettant en jeu l'énergie globale de toutes les gouttes constituant le fluide — énergie interne de chaque goutte et énergie externe liée à leurs interactions.

Comme la définition du centre de gravité et du centre de masse font appel à des intégrales sur l'espace d'inertie, le vecteur R_μ joignant ces deux points ne sera plus donné, comme dans le cas de la goutte libre par l'expression $S_\mu G_\nu / M_0^2 c^2$, les tenseurs qui constituent celle-ci résultant d'intégrales prises sur le volume propre.

Par contre, si nous définissons un *centre de masse* X_μ dans le système

propre, on voit facilement que la relation trouvée dans le cas de la goutte libre :

$$S_{\mu\nu}U_\nu = \mathcal{M}_0 c^2 (Y_\mu - X_\mu)$$

subsiste, les deux membres ne mettant en œuvre que des intégrales d'espace propre. Aussi la décomposition du moment angulaire interne que nous tirerons de cette relation a-t-elle une valeur tout à fait générale et acquiert-elle une grande importance.

§ 5. Généralités sur les fluides à spin à tensions internes.

Nous pouvons maintenant considérer une collection de corpuscules du genre de celui que nous venons de considérer, avec une distribution continue des grandeurs qui les caractérisent, et constituer un *fluide* comme nous l'avons fait avec les corpuscules libres. Outre les densités ordinaires de matière ρ , d'impulsion g_μ , de spin σ_μ et de moment angulaire interne $s_{\mu\nu}$, nous aurons encore à considérer une densité volumique de force f_μ et une densité volumique de couple $\gamma_{\mu\nu}$ (on devra bien prendre garde que ces symboles n'ont plus du tout la même signification que dans les considérations sur la goutte. Nous passons désormais à une échelle beaucoup plus grande, où on a à considérer des moyennes prises sur des volumes $d\nu$ contenant un très grand nombre de corpuscules tournants. L'actuelle densité de force f_μ est obtenue en faisant la somme des forces globales F_μ agissant sur tous les corpuscules contenus dans le volume $d\nu$, et en formant le quotient : $f_\mu = \Sigma F_\mu / d\nu$. Dans les paragraphes précédents, au contraire, nous avons eu à considérer une densité de force agissant sur les différents points d'une des gouttes, que nous considérons maintenant comme des corpuscules, et nous avons formé la force globale F_μ en *intégrant* cette densité sur le volume de la goutte). Étant donné les remarques que nous avons faites sur la force globale et le couple global, nous sommes libres de considérer des densités de force ou de couple non situés dans l'espace propre.

Les équations globales sur la goutte :

$$\begin{aligned}\dot{G}_\mu &= F_\mu \\ \dot{S}_{\mu\nu} + G_\nu U_\mu - G_\mu U_\nu &= \Gamma_{\mu\nu}\end{aligned}$$

nous fournissent immédiatement les équations hydrodynamiques fondamentales :

$$\begin{aligned}\dot{g}_\mu &= f_\mu \\ \dot{s}_{\mu\nu} + g_\nu u_\mu - g_\mu u_\nu &= \gamma_{\mu\nu}\end{aligned}$$

auxquelles il faut ajouter l'équation de conservation de la matière :

$$\dot{\rho} = 0.$$

Les dérivations désignées par un point ont la signification que nous avons rappelée au début de ce chapitre.

Les forces et les couples qui nous intéressent ne sont pas des actions exercées de l'extérieur du fluide. Elles résultent d'interaction entre les particules. La force F_μ et le couple $\Gamma_{\mu\nu}$ que subit chaque particule prise à part sont les résultats d'actions exercées sur cette particule par l'ensemble des autres particules. Elles s'exprimeront complètement au moyen des propriétés de ces autres particules, c'est-à-dire au moyen des grandeurs hydrodynamiques locales et de leurs dérivées. f_μ et $\gamma_{\mu\nu}$ constituent donc des grandeurs hydrodynamiques auxiliaires qui sont en principe déterminées par les propriétés hydrodynamiques fondamentales — soit ρ , u_μ , g_μ , σ_μ , $s_{\mu\nu}$ — avant qu'on pose les équations dynamiques au moyen desquelles f_μ et $\gamma_{\mu\nu}$ détermineront à leur tour l'évolution de ces grandeurs fondamentales.

Pour introduire différents types d'interactions la méthode la plus correcte est de postuler la forme d'un terme de couplage se présentant comme une densité d'énergie, et d'ajouter ce terme au lagrangien du fluide « matière pure ». A partir de là, la méthode ordinaire nous fournira un tenseur d'énergie impulsion comportant une partie cinétique, et une autre partie que nous interprétons comme un tenseur des tensions internes $\theta_{\mu\nu}$. De ce tenseur nous tirons alors une densité de force :

$$f_\mu = -\partial_\nu \theta_{\mu\nu} \text{ et une densité de couple : } \gamma_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} - \theta_{\nu\mu} = 2\theta_{\mu\nu}.$$

C'est toujours ainsi que nous opérerons, bien qu'il en résulte probablement certaines restrictions dans les types de forces et de couples d'interactions auxquels on est ainsi conduit. Mais nous pensons que l'on atteint ainsi tous les cas réellement intéressants.

On peut rencontrer une difficulté dans l'assimilation que nous proposons entre les fluides obtenus à partir de corpuscules liés par des forces et des couples, et les fluides dérivant d'un formalisme lagrangien. Pour ces derniers en effet, nous avons vu que la décomposition générale du tenseur d'énergie-impulsion nous donne :

$$t_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu - p_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \theta_{\mu\nu}$$

Les tenseurs p_μ , q_μ et $\theta_{\mu\nu}$ étant orthogonaux au courant.

Le traitement lagrangien nous fournira donc, outre un tenseur des tensions internes situé tout entier dans l'espace propre — d'où résultent des conditions restrictives sur la force et le couple — une quantité q_μ qui semble difficile à interpréter. En effet si, dans le cas général de la représentation hydrodynamique des fonctions d'ondes fournies par un formalisme lagrangien, nous avons pu désigner q_μ comme un « courant

de chaleur », entendant par là une forme d'énergie qui se déplace dans le fluide indépendamment de la matière et sans l'aide d'une force mécanique, au contraire dans le cas présent, nous n'avons pas d'autre énergie que celle qui est localisée sur les corpuscules et se déplace avec eux, pas d'autres échanges d'énergie que ceux qui s'opèrent par le moyen des forces de tension interne. Si nous formons un tenseur d'énergie impulsion en partant des corpuscules et des forces d'interactions nous trouverons une partie cinétique $g_\mu u$, et un tenseur des tensions $\theta_{\mu\nu}$, mais pas de courant de chaleur. Pour retomber sur le formalisme général, il faut donc se débarrasser de la quantité q_μ .

Pour cela, on peut s'inspirer des considérations physiques que nous avons développées au chapitre IV à propos de la dynamique d'une goutte de fluide, dynamique qui était résumée par les deux équations globales :

$$\begin{aligned}\dot{G}_\mu - U_\mu \left(- \int_{S_0} q_i^0 ds_i^0 + \int_{V_0} \frac{w_0}{c^2} dv_0 \right) &= F_\mu \\ \dot{S}_{\mu\nu} + \left(G_\nu - \int_{V_0} q_\nu dv_0 \right) U_\mu - \left(G_\mu - \int_{V_0} q_\mu dv_0 \right) U_\nu &= 2 \int_{V_0} \theta_{\mu\nu} dv_0\end{aligned}$$

Nous avons dit que ces équations faisaient apparaître l'impulsion globale G_μ obtenue par la méthode ordinaire, comme une quantité en partie fictive, et que les quantités *dynamiques* dont l'évolution est entièrement déterminée par la force et le couple suivant les équations ordinaires de la dynamique du corpuscule tournant, sont :

$$G_\mu - \int_{V_0} q_\mu dv_0$$

pour l'équation des couples, et

$$\dot{G}_\mu - U_\mu \left(- \int_{S_0} q_i^0 ds_i^0 + \int_{V_0} \frac{w_0}{c^2} dv_0 \right)$$

pour celle des forces. On peut appliquer ces considérations aux équations hydrodynamiques et changer la définition de la densité d'impulsion et du tenseur des tensions, de façon à éliminer le courant de chaleur, et en même temps à faire apparaître uniquement des grandeurs qui, après intégration sur une goutte, donneront les quantités dynamiques ayant une signification physique.

§ 6. Fluides à spin sans courant de chaleur.

Nous définirons d'abord une *densité d'impulsion purement cinétique* g'_μ en retranchant le courant de chaleur de la densité d'impulsion généralisée g_μ : $g'_\mu = g_\mu - q_\mu$.

Cela revient à prendre, au lieu de l'impulsion transversale p_μ , dont nous avons vu qu'elle résultait à la fois de la rotation interne (cas de l'équation de Weyssenhoff) et du courant de chaleur (cas de l'équation de Klein Gordon), une impulsion transversale purement cinétique :

$$p'_\mu = p_\mu + q_\mu$$

qui n'est plus liée qu'à la rotation interne, puisque nous aurons, dans tous les cas, comme nous l'avons montré au chapitre IV, la relation de Weyssenhoff :

$$p'_\mu = p_\mu + q_\mu = -\frac{1}{c^2} s_{\mu\nu} \dot{u}_\nu.$$

Comme q_μ est orthogonal au courant, nous n'apportons pas de modification à la densité de masse propre : $g'_\mu u_\mu = g_\mu u_\mu = -\mu_0 c^2$ et l'impulsion prendra, indépendamment des tensions internes, la forme donnée par Weyssenhoff :

$$(V-17) \quad g'_\mu = \mu_0 u_\mu + \frac{1}{c^2} s_{\mu\nu} \dot{u}_\nu$$

ce qui montre bien qu'elle exprime une propriété attachée aux corpuscules et où les interactions n'entrent pas en ligne de compte.

Il résulte également de cette équation (conséquence de l'équation des couples) que g'_μ est orthogonal à l'accélération d'univers $\dot{u}_\mu$ et au spin σ_μ ce qu'on montre en contractant respectivement par ces deux vecteurs et en tenant compte de : $s_{\mu\nu} \sigma_\nu = 0$ et de : $s_{\mu\nu} \dot{u}_\mu \dot{u}_\nu = 0$ (antysymétrie).

$$g'_\mu \dot{u}_\mu = 0$$

(V-18)

$$g'_\mu \sigma_\mu = 0$$

Si nous comparons avec les résultats trouvés au chapitre III dans le cas matière pure, on voit que le système des quatre vecteurs u_μ , $\dot{u}_\mu$, p'_μ , σ_μ a tous ses angles droits, sauf celui de σ_μ et $\dot{u}_\mu$.

La relation (18) résulte de la contraction par $u_\nu \sigma_\mu$ de l'équation des couples :

$$(V-19) \quad g'_\mu u_\nu - g'_\nu u_\mu + 2\theta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

On peut, suivant la méthode de Takabayasi, obtenir deux autres équations en contractant respectivement par $i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha$ et par $i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_\alpha$. Ces deux équations, et l'équation (18) formeront un système équivalent à (19).

En contractant par $i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha$, les deux termes $g'_\mu u_\nu$ et $g'_\nu u_\mu$ disparaissent. Il vient :

$$2i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\mu\nu} u_\alpha = i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} u_\alpha$$

Si on remplace $s_{\mu\nu}$ par son expression en fonction du spin et de la vitesse, le second membre donne :

$$\begin{aligned} i c \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} \frac{d}{d\tau} (u_\gamma \sigma_\delta) u_\alpha &= -2 \delta_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \frac{d}{d\tau} (u_\gamma \sigma_\delta) u_\alpha \\ &= -2 [(\dot{u}_\alpha \sigma_\beta + u_\alpha \dot{\sigma}_\beta) u_\alpha - (\dot{u}_\beta \sigma_\alpha + u_\beta \dot{\sigma}_\alpha) u_\alpha] \\ &= -2 (-c^2 \dot{\sigma}_\beta - u_\alpha \dot{\sigma}_\alpha \cdot u_\beta) = 2(c^2 \dot{\sigma}_\beta - \dot{u}_\alpha \sigma_\alpha \cdot u_\beta) \end{aligned}$$

On a ainsi la première équation :

(V-20)

$$i c \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\mu\nu} u_\alpha = c^2 \dot{\sigma}_\beta - \dot{u}_\alpha \sigma_\alpha \cdot u^\beta \equiv \eta_{\alpha\beta} c^2 \dot{\sigma}_\alpha$$

équation qui exprime la loi d'évolution du spin.

Contractons enfin par $\frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_\alpha$:

$$2 \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} g'_\mu u_\nu \sigma_\alpha + \frac{2i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\mu\nu} \sigma_\alpha = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \dot{\sigma}_\mu \sigma_\alpha$$

Dans le premier terme apparaît l'expression de $s_{\mu\beta}$, le premier membre devient :

$$2 s_{\mu\beta} g'_\mu + 2 \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\mu\nu} \sigma_\alpha$$

Le second membre, transformé comme précédemment, fournit :

$$-\frac{2}{c^2} \delta_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \frac{d}{d\tau} (u_\gamma \sigma_\delta) \sigma_\alpha = -\frac{2}{c^2} (\sigma_\alpha \dot{u}_\alpha \cdot \sigma_\beta - \sigma_0^2 \dot{u}_\beta - \sigma_0 \dot{\sigma}_0 u_\beta)$$

en introduisant le module du spin : $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha \sigma_\alpha$ et sa dérivée : $\dot{\sigma}_0 = \sigma_\alpha \dot{\sigma}_\alpha / \sigma_0$.
On a ainsi :

$$-s_{\mu\beta} g'_\mu = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\mu\nu} \sigma_\alpha + \frac{1}{c^2} (\sigma_\alpha \dot{u}_\alpha \cdot \sigma_\beta - \sigma_0^2 \dot{u}_\beta - \sigma_0 \dot{\sigma}_0 u_\beta).$$

Cette équation peut se transformer en introduisant l'expression (17) de g'_μ et en tenant compte de la relation (III-15) pour exprimer le produit $s_{\mu\beta} s_{\mu\nu}$, le premier membre devient :

$$-\frac{1}{c^2} \left[\sigma_0^2 \left(\delta_{\beta\nu} + \frac{u_\beta u_\nu}{c^2} \right) - \sigma_\beta \sigma_\nu \right] \dot{u}_\nu = -\frac{1}{c^2} (\sigma_0^2 \dot{u}_\beta - \sigma_\nu \dot{u}_\nu \sigma_\beta)$$

D'où l'équation :

$$\sigma_\nu \dot{u}_\nu \sigma_\beta - \sigma_0^2 \dot{u}_\beta = i c \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\mu\nu} \sigma_\alpha + \sigma_\alpha \dot{u}_\alpha \sigma_\beta - \sigma_0^2 \dot{u}_\beta - \sigma_0 \dot{\sigma}_0 u_\beta$$

d'où finalement :

(V-21)

$$\sigma_0 \dot{\sigma}_0 u_\beta = i c \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\mu\nu} \sigma_\alpha$$

Équation qui donne l'expression du courant.

Enfin, en contractant l'équation (20) par σ_3 ou l'équation (21) par u_3 on obtient l'importante relation :

$$ic\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\theta_{\mu\nu}\sigma_\alpha u_\beta = -c^2\sigma_0\dot{\sigma}_0$$

soit :

$$\sigma_0\dot{\sigma}_0 = \theta_{\mu\nu}s_{\mu\nu}$$

qui fournit la variation du module du spin et qui montre que la condition pour que celui-ci soit constant est :

$$\theta_{\mu\nu}s_{\mu\nu} = 0.$$

Si nous introduisons g'_μ au lieu de g_μ , le tenseur d'énergie-impulsion prend évidemment la forme :

$$t_{\mu\nu} = g'_\mu u_\nu + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \theta_{\mu\nu}$$

et nous pouvons faire entrer les deux termes de « chaleur » dans les tensions, en posant : $\theta'_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu$.

Dans ces conditions, on a :

$$t_{\mu\nu} = g'_\mu u_\nu + \theta'_{\mu\nu}$$

et la relation de conservation s'écrit :

$$(V-22) \quad \dot{g}'_\mu = -\partial_\nu \theta'_{\mu\nu} = \Phi'_\mu$$

Ici, le nouveau tenseur des tensions n'est pas dans l'espace propre puisqu'on a : $\theta'_{\mu\nu}u_\nu = -c^2q_\mu$ et : $\theta'_{\mu\nu}u_\mu = -c^2q_\nu$.

Nous remarquerons que les termes ajoutés à $\theta_{\mu\nu}$ sont symétriques en μ et ν si bien qu'on peut dans l'équation des couples et dans les relations qui en résultent, remplacer simplement $\theta_{\mu\nu}$ par $\theta'_{\mu\nu}$. Il en résultera par ailleurs que le moment du couple $\theta'_{\mu\nu}$ sera dans l'espace propre, comme dans l'ancien formalisme.

Nous pouvons tirer deux relations importantes de l'équation (22) en la contractant par u_μ et par σ_μ ; on a : $\dot{g}'_\mu u_\mu = \Phi'_\mu u_\mu$.

Le premier membre exprime la variation $-\dot{\rho}_0 c^2$ de la densité de masse propre, puisque : $\dot{g}'_\mu \dot{u}_\mu = 0$.

Le second est lié à la composante de temps de la densité de force dans le système propre :

$$\dot{\rho}_0 = \frac{1}{c^2} u_\mu \partial_\nu \theta'_{\mu\nu}$$

Cette relation, qui traduit la conservation de l'énergie, diffère par deux points de la relation correspondante dans la théorie de Takabayasi.

D'une part, le courant de chaleur n'y figure plus explicitement. Les échanges d'énergie dans le système propre ne se traduisent que par des variations de la masse propre des particules, variations qui tiennent, comme nous l'avons dit, aux nouveaux paramètres liés à la structure des particules et qui se traduisent par des modifications de l'énergie cinétique des mouvements internes de chaque particule. D'autre part, si on décompose la densité de force φ'_μ en une composante d'espace propre f'_μ ($f'_\mu u_\mu = 0$) et une composante de courant $\frac{A_0}{c^2} u_\mu$:

$$\varphi'_\mu = f'_\mu + \frac{A_0}{c^2} u_\mu$$

on a :

$$\dot{\mu}_0 = -\frac{1}{c^2} \varphi'_\mu u_\mu = \frac{A_0}{c^2}.$$

Mais si nous comparons A_0 avec le terme correspondant de l'ancien formalisme :

$$w_0 = -\varphi_\mu u_\mu = \theta_{\mu\nu} \partial_\nu u_\mu$$

on voit que A_0 comporte, outre w_0 , les termes de chaleur $-c^2 \partial_\nu q_\nu$ et $-u_\mu u_\nu \partial_\nu q_\mu$ qui peuvent être d'un ordre de grandeur supérieur, à cause du facteur c^2 . Ceci est lié au fait, déjà signalé à propos de la goutte au début du présent chapitre, que les variations de l'énergie cinétique interne de la goutte peuvent correspondre, pour la force qui agit sur cette goutte, à une composante de temps dans le système propre qui soit d'un ordre de grandeur non relativiste, alors que la force de Takabayasi, gradient d'une tension $\theta_{\mu\nu}$ d'espace propre, n'a qu'une composante de temps en $\frac{1}{c^2}$ dans le système propre.

Nous pouvons utiliser cette relation pour écrire l'équation différentielle des lignes de courant :

$$\dot{g}'_\mu = \dot{\mu}_0 u_\mu + \mu_0 \dot{u}_\mu + \frac{1}{c^2} s_{\mu\lambda} \ddot{u}_\lambda + \frac{1}{c^2} \dot{s}_{\mu\lambda} \dot{u}_\lambda = \varphi'_\mu.$$

Si nous portons la valeur trouvée pour $\dot{\mu}_0$ et l'expression de $\dot{s}_{\mu\lambda}$, il vient :

$$\frac{1}{c^2} u_\nu \partial_\lambda \theta'_{\nu\lambda} u_\mu + \mu_0 \dot{u}_\mu + \frac{1}{c^2} s_{\mu\lambda} \ddot{u}_\lambda + \frac{1}{c^2} (g'_{\mu\lambda} u_\lambda - g'_\lambda u_\mu + 2\theta'_{\mu\lambda}) \dot{u}_\lambda = -\partial_\lambda \theta'_{\mu\lambda}$$

Les deux premiers termes de la parenthèse s'annulent, et on a, rassemblant les termes semblables :

$$\left(\mu_0 \delta_{\mu\nu} + \frac{2}{c^2} \theta'_{\mu\nu} \right) \dot{u}_\nu + \frac{1}{c^2} s_{\mu\nu} \ddot{u}_\nu = -\eta_{\mu\lambda} \partial_\nu \theta'_{\lambda\nu}.$$

Cette équation, où on reconnaît au second membre l'expression de la force d'espace propre : $f_\mu = \eta_{\mu\lambda} \varphi_\lambda$ généralise l'équation de Mathisson du fluide matière pure (voir chapitre III).

Enfin, en contractant (22) par σ_μ , on obtient, en tenant compte de (18) :

$$\dot{g}'_\mu \sigma_\mu = - \dot{\sigma}_\mu g'_\mu = - \partial_\nu \theta'_{\mu\nu} \cdot \sigma_\mu.$$

Ou, en tirant de (20) l'expression de $\dot{\sigma}_\mu$:

$$- \frac{1}{c^2} \sigma_\alpha \dot{u}_\alpha \cdot u_\beta g'_\beta - \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta'_{\mu\nu} u_\alpha g'_\beta = - \partial_\nu \theta'_{\mu\nu} \sigma_\mu$$

$$\boxed{\mu_0 \sigma_\alpha \dot{u}_\alpha = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta'_{\mu\nu} u_\alpha g'_\beta - \sigma_\mu \partial_\nu \theta'_{\mu\nu}}$$

ce qui nous fournit l'expression du produit scalaire $\sigma_\alpha \dot{u}_\alpha$, et la condition d'orthogonalité des deux vecteurs σ_α et $\dot{u}_\alpha$:

$$\frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta'_{\mu\nu} u_\alpha g'_\beta = \sigma_\mu \partial_\nu \theta'_{\mu\nu}.$$

Si cette condition est satisfaite, le dernier angle de notre système de vecteurs u_μ , $\dot{u}_\mu$, p_μ , σ_μ est droit et nous retrouvons le système d'axes de Darboux-Freinet généralisés que nous avons signalé dans le cas matière pure (chapitre III).

Nous comprendrons mieux la signification de notre formalisme en intégrant les équations fondamentales sur le volume d'une gouttelette *infinitésimale* découpée dans le fluide suivant le méthode habituelle :

En posant :

$$\Gamma_{\mu\nu} = 2 \int_{V_0} \theta'_{\mu\nu} dV_0.$$

On a immédiatement pour l'équation des couples :

$$G'_\mu U_\nu - G'_\nu U_\mu + \Gamma_{\mu\nu} = \dot{S}_{\mu\nu}$$

équation dont la signification est claire.

Le calcul est un peu plus délicat pour l'équation des forces. On obtient :

$$\dot{G}_\mu d\tau = - \int_\Omega \partial_\nu \theta'_{\mu\nu} d\omega.$$

Nous pouvons transformer le second membre en une intégrale d'hyper-surface étendue, d'une part, aux cloisons C_1 et C_2 d'espace propre, d'autre part, à la paroi P du tube de courant (Appendice A).

$$\dot{G}_\mu d\tau = - \int_{C_1} \theta'_{\mu\nu} d\sigma_\nu - \int_{C_2} \theta'_{\mu\nu} d\sigma_\nu - \int_P \theta'_{\mu\nu} d\sigma_\nu$$

Les termes de cloison ne sont pas nuls comme ce serait le cas avec le formalisme de Takabayasi. En transformant dans les deux intégrales de cloison $d\sigma_v$ en $-u_v d\nu_0$ et $+u_v d\nu_0$, il vient :

$$\begin{aligned}\dot{G}_\mu d\tau &= \int_{C_1} \theta'_{\mu\nu} u_\nu d\nu_0 - \int_{C_2} \theta'_{\mu\nu} u_\nu d\nu_0 - \int_P \theta'_{\mu\nu} d\sigma_\nu \\ \dot{G}_\mu d\tau &= -\frac{d}{d\tau} \int_{V_0} \theta'_{\mu\nu} u_\nu d\nu_0 d\tau - \int_P \theta'_{\mu\nu} d\sigma_\nu\end{aligned}$$

On peut dériver sous le signe somme, d'où :

$$(V-23) \quad \dot{G}_\mu d\tau = - \int_{V_0} \partial_\lambda (\theta'_{\mu\nu} u_\nu u_\lambda) d\nu_0 d\tau - \int_P \theta'_{\mu\nu} d\sigma_\nu.$$

Pour interpréter le dernier terme, il faut se placer dans le système propre. On sait que $d\sigma_v$ n'a alors que des composantes d'espace qui sont :

$$d\sigma_j^0 = -ds_j^0 d\tau$$

ds_j^0 étant l'élément de surface dans l'espace propre.

On introduit alors une densité volumique de force :

$$f_\mu = -\partial_\lambda (\theta'_{\mu\nu} u_\nu u_\lambda).$$

Les composantes d'espace propre de f_μ sont :

$$f_k^0 = -\partial_4 (\theta_{k4}^0 ic, ic) = -ic \frac{\partial}{\partial t} \theta_{k4}^0.$$

Elles sont liées, comme on le voit aux composantes de temps propre de notre tenseur des tensions.

La composante de temps propre est :

$$f_4^0 = -\partial_4 (\theta_{44}^0 ic, ic) = 0$$

car la composante de temps pure de : $\theta'_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu$ est évidemment nulle,

La densité de force f_μ est donc un vecteur d'espace propre (comme le courant de chaleur de l'ancien formalisme auquel elle est évidemment liée). On a alors :

$$\dot{G}_k^0 = \int_{V_0} f_k^0 d\nu_0 + \int_{S_0} \theta_{k4}^0 ds_j^0.$$

On voit que l'intégrale de surface représente simplement la force classique produite par les *actions de surface* exprimées par le tenseur des tensions θ_{kj}^0 (qui, dans l'espace propre, se confond avec θ_{kj}^0 puisque les termes $q_k^0 u_j^0$ et $q_j^0 u_k^0$ sont nuls). La nouveauté, par rapport aux fluides de Takabayasi, tient au terme $\int_{V_0} f_k^0 d\nu_0$, qui manifeste l'existence d'*ac-*

tions de volume liées à la divergence $\partial_\lambda(\theta'_\mu u_\lambda)$. Les interactions introduites sous forme d'un lagrangien de couplage se traduiront donc, en général, non seulement par des tensions internes exprimées par des forces de surface, mais également par un *champ intérieur* s'exerçant sur tout le volume de la goutte et exprimé par la densité volumique de force :

$$f_\mu = -\partial_\lambda(\theta'_\mu u_\lambda)$$

du reste non située dans l'espace propre.

Enfin, la quatrième composante de l'équation (23) dans le système propre nous fournira la variation de la masse propre totale, soit :

$$\dot{G}_4^0 = ic \dot{M}_0 = \int_{S_0} \theta'_4{}^0 ds_0^0$$

puisque la composante f_4^0 est nulle. Cette intégrale représente un travail produit par les forces de tension à la surface de la goutte.

§ 7. Cas d'une interaction « fluide parfait ».

Pour terminer, nous ferons l'application de la théorie à quelques cas déterminés d'interaction. Nous considérerons d'abord le cas d'un *fluide parfait* obéissant à une équation d'état, généralisant ce que nous avons dit sur le fluide parfait classique. Nous n'avons qu'à remplacer dans le lagrangien du fluide à spin « matière pure » la densité de masse ρm_0 par la forme plus générale $\mu_0(\rho)$:

$$\mathcal{L} = \mu_0(\rho)c^2 + ic\rho a_\mu^4 \partial_\mu S + ic\rho h_0 a_\mu^4 a_\lambda^4 \partial_\mu a_\lambda^2 + \lambda_{\mu\nu}(a_\mu^5 a_\nu^5 - \delta_{\mu\nu}).$$

Rien n'est changé par rapport au fluide « matière pure » en ce qui concerne le tenseur de Belinfante et le moment angulaire interne, qui gardent la forme habituelle. Si on dérive par rapport à ρ on a :

$$\dot{S} = -\mu'_0 c^2 - h_0 a_\lambda^4 \dot{a}_\lambda^2$$

ce qui fournit pour le lagrangien une valeur non-nulle :

$$\mathcal{L} = (\mu_0 - \rho\mu'_0)c^2.$$

Les dérivations par rapport aux a_μ^5 vont donner les mêmes expressions que pour le fluide matière pure et on obtiendra ainsi une expression antisymétrique :

$$(V-24) \quad \dot{s}_{\mu\nu} = ic\rho(a_\nu^4 \partial_\mu S - a_\mu^4 \partial_\nu S) + ic\rho h_0 a_\lambda^4 (a_\nu^4 \partial_\mu a_\lambda^2 - a_\mu^4 \partial_\nu a_\lambda^2).$$

En contractant par a_μ^4 et en remplaçant $\dot{S}$ par son expression, il vient :

$$(V-25) \quad ic\rho \partial_\nu S = -\rho\mu'_0 c^2 a_\nu^4 - ic\rho h_0 a_\lambda^4 \partial_\nu a_\lambda^2 - s_{\nu\lambda} \dot{a}_\lambda^2.$$

On peut alors former le tenseur d'énergie-impulsion, en tenant compte du terme contenant le lagrangien :

$$t_{\mu\nu} = -a_\nu^i(\rho\mu_0'c^2a_\mu^i + ic\rho h_0a_\lambda^i\delta_\mu a_\lambda^2 + s_{\mu\lambda}\dot{a}_\lambda^i) + ic\rho h_0a_\lambda^i a_\mu^i\delta_\mu a_\lambda^2 - \delta_{\mu\nu}(\mu_0 - \rho\mu_0'c^2).$$

$$t_{\mu\nu} = \rho\mu_0'u_\mu u_\nu + \frac{1}{c^2}s_{\mu\lambda}\dot{u}_\lambda u_\nu - \delta_{\mu\nu}(\mu_0 - \rho\mu_0')c^2$$

On en tire, en contractant par u_ν l'expression ordinaire de l'impulsion :

$$-c^2g_\mu = -\rho\mu_0'u_\mu c^2 - s_{\mu\lambda}\dot{u}_\lambda - \mu_0 c^2 u_\mu + \rho\mu_0'c^2 u_\mu$$

$$g_\mu = \mu_0 u_\mu + \frac{1}{c^2}s_{\mu\lambda}\dot{u}_\lambda.$$

Il n'y a pas de flux de chaleur : $t_{\mu\nu}u_\mu = -c^2\mu_0 u_\nu$, et le tenseur des tensions se réduit à :

$$\theta_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} - g_\mu u_\nu$$

$$= (\rho\mu_0' - \mu_0)u_\mu u_\nu + c^2\delta_{\mu\nu}(\rho\mu_0' - \mu_0)$$

$$\theta_{\mu\nu} = c^2(\rho\mu_0' - \mu_0)\eta_{\mu\nu}.$$

Il est symétrique, situé dans l'espace propre, et prend la forme d'une tension « fluide parfait » classique correspondant à une *pression* :

$$\pi = c^2(\rho\mu_0' - \mu_0).$$

Nous aurons donc une densité de force :

$$\varphi_\mu = -\partial_\nu(\eta_{\mu\nu}\pi)$$

et pas de densité de couple puisque $\theta_{\mu\nu}$ est symétrique. L'équation des couples est donc simplement :

$$\dot{s}_{\mu\nu} = g_\mu u_\nu - g_\nu u_\mu$$

comme on le vérifie facilement en remplaçant dans l'équation (24) $\partial_\nu S$ par son expression (25).

Les équations obtenues en contractant (24) par $u_\mu\sigma_\nu$, par $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}u_\alpha$ et par $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_\alpha$ donnent respectivement, outre la relation ordinaire :

$$g_\mu\sigma_\mu = 0$$

$$c^2\dot{\sigma}_\beta = \dot{u}_\alpha\sigma_\alpha \cdot u_\beta$$

et :

$$\sigma_0\dot{\sigma}_0 u_\beta = 0.$$

Il en résulte, d'une part, que le *module du spin* est constant :

$$\dot{\sigma}_0 = 0$$

(ce qui est le cas de tous les fluides à tensions symétriques en raison de

la relation : $\sigma_0 \dot{\sigma}_0 = \theta_{\mu\nu} s_{\mu\nu}$, d'autre part, que $\dot{\sigma}_3$, colinéaire au courant, est orthogonal à l'accélération d'univers :

$$\dot{\sigma}_3 \dot{u}_3 = 0$$

ainsi qu'à l'impulsion transversale :

$$\dot{\sigma}_3 p_\beta = 0.$$

L'équation des forces :

$$(V-26) \quad \dot{g}_\mu = -\partial_\nu (\eta_{\mu\nu} \pi)$$

donne, par contraction par u_μ , la relation sur l'énergie propre :

$$\dot{\mu}_0 c^2 = u_\mu \partial_\nu \theta_{\mu\nu}$$

qui prend ici la forme habituelle dans le cas des fluides parfaits :

$$\dot{\mu}_0 c^2 = \partial_\nu (\theta_{\mu\nu} u_\mu) - \eta_{\mu\nu} \pi \partial_\nu u_\mu$$

soit, comme $\theta_{\mu\nu} u_\mu = 0$ et $\eta_{\mu\nu} \partial_\nu u_\mu = \partial_\mu u_\mu$:

$$\boxed{\dot{\mu}_0 c^2 = -\pi \partial_\mu u_\mu}.$$

Cette expression permet d'écrire l'équation différentielle des lignes de courant :

$$\begin{aligned} \mu_0 \dot{u}_\mu + \frac{1}{c^2} s_{\mu\nu} \ddot{u}_\nu &= -\eta_{\mu\nu} \partial_\lambda (\eta_{\nu\lambda} \pi) \\ &= -\partial_\lambda (\eta_{\mu\lambda} \pi) + \eta_{\nu\lambda} \pi \partial_\lambda \left(\frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) \\ &= -\eta_{\mu\lambda} \partial_\lambda \pi - \pi \partial_\lambda \left(\frac{u_\mu u_\lambda}{c^2} \right) + \pi \partial_\nu \left(\frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) + \frac{u_\nu u_\lambda}{c^2} \pi \partial_\lambda \left(\frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) \\ &= -\eta_{\mu\lambda} \partial_\lambda \pi + \frac{u_\nu u_\lambda}{c^2} \frac{\pi}{c^2} u_\nu \partial_\lambda u_\mu + \frac{u_\nu u_\lambda}{c^2} \frac{\pi}{c^2} u_\mu \partial_\lambda u_\nu \end{aligned}$$

Le dernier terme s'annule car : $u_\nu \partial_\lambda u_\nu = 0$.

Le second s'écrit : $-\frac{\pi}{c^2} \dot{u}_\mu$.

D'où : $\frac{1}{c^2} s_{\mu\nu} \ddot{u}_\nu + \left(\mu_0 + \frac{\pi}{c^2} \right) \dot{u}_\mu = -\eta_{\mu\lambda} \partial_\lambda \pi$.

On voit ainsi apparaître la densité de pseudomasse des fluides parfaits (Appendice B) : $\mu = \mu_0 + \frac{\pi}{c^2}$.

D'autre part, les vecteurs $s_{\mu\nu} \ddot{u}_\nu$ et $\dot{u}_\mu$ étant dans l'espace propre, le premier membre peut être, sans modification, projeté sur l'espace propre :

$$\eta_{\mu\lambda} \left[\frac{1}{c^2} s_{\lambda\nu} \ddot{u}_\nu + \mu \dot{u}_\lambda \right] = -\eta_{\mu\lambda} \partial_\lambda \pi$$

soit finalement l'équation :

$$\eta_{\mu\lambda} \left[\frac{1}{c^2} s_{\lambda\nu} \ddot{u}_\nu + \mu \dot{u}_\lambda + \partial_\lambda \pi \right] = 0.$$

Cette équation, qui généralise l'équation de Mathisson, exprime qu'en projection sur l'espace propre, le vecteur : $\frac{1}{c^2} s_{\lambda\nu} \ddot{u}_\nu + \mu \dot{u}_\lambda + \partial_\lambda \pi$ est nul.

On voit apparaître la densité de champs de forces internes de M. Lichnerowicz et cette expression générale fait apparaître directement les deux cas particuliers : le fluide parfait sans spin, pour lequel :

$$s_{\nu\lambda} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{u}_\lambda + \frac{\partial_\lambda \pi}{\mu} = 0.$$

le fluide à spin « matière pure », pour lequel :

$$\frac{\partial_\lambda \pi}{\mu} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{c^2} s_{\lambda\nu} \ddot{u}_\nu + \mu \dot{u}_\lambda = 0.$$

Enfin, en contractant (26) par σ_μ :

$$\begin{aligned} \mu_0 \dot{u}_\mu \sigma_\mu &= -\sigma_\mu \partial_\nu (\eta_{\mu\nu} \pi) \\ &= -\partial_\nu (\eta_{\mu\nu} \sigma_\mu \pi) + \eta_{\mu\nu} \pi \partial_\nu \sigma_\mu \\ &= -\partial_\nu (\sigma_\nu \pi) + \pi \left(\partial_\mu \sigma_\mu + \frac{u_\mu u_\nu \partial_\nu \sigma_\mu}{c^2} \right) \\ &= -\sigma_\nu \partial_\nu \pi + \frac{\pi}{c^2} \delta_\mu \dot{u}_\mu. \end{aligned}$$

On a enfin, en introduisant encore la densité de pseudomasse : $\mu = \mu_0 + \frac{\pi}{c^2}$

$$\mu \left(\dot{u}_\nu + \frac{\partial_\nu \pi}{\mu} \right) \sigma_\nu = 0.$$

On voit encore apparaître le vecteur $\dot{u}_\nu + \frac{\partial_\nu \pi}{\mu}$ qui est nul dans le cas du fluide parfait sans spin, et qui se réduit à $\dot{u}_\nu$ dans le cas du fluide à spin « matière pure ». Dans le cas général, c'est à ce vecteur — et non pas à $\dot{u}_\nu$ — que le spin est orthogonal.

Nous pouvons appliquer ces formules au « gaz parfait à spin » en généralisant le cas « gaz parfait classique ». A l'équation d'état : $\mu_0 = C \rho^{k+1}$ correspond la pression : $\pi = c^2 k C \rho^{k+1}$ et il en résulte : la densité de pseudomasse : $\mu = \mu_0 + \frac{\pi}{c^2} = \frac{k+1}{k} \frac{\pi}{c^2}$.

Le gradient : $\partial_\lambda \pi = (k+1) \pi \partial_\lambda \text{Log } \rho$.

Le champ de force : $k_\lambda = \frac{\partial_\lambda \pi}{\mu} = k c^2 \partial_\lambda \text{Log } \rho$.

On obtient alors la variation de la densité de masse : $\dot{\mu}_0 = -\frac{1}{c^2} \pi \partial_\nu u_\nu$,
celle de la densité de pseudomasse : $\dot{\mu} = \frac{1}{c^2} u_\nu \partial_\nu \pi = k_\mu u_\nu \partial_\nu \text{Log } \rho$.

L'équation des lignes de courant est :

$$\eta_{\mu\nu\lambda} \left[\frac{1}{c^2} s_{\lambda\nu} \ddot{u}_\lambda + \mu (\dot{u}_\lambda + k c^2 \partial_\lambda \text{Log } \rho) \right] = 0.$$

L'angle du spin et de l'accélération d'univers est donné par :

$$(\ddot{u}_\nu + k c^2 \partial_\nu \text{Log } \rho) \sigma_\nu = 0.$$

§ 8. Cas d'une interaction « moment angulaire-tourbillon ».

Considérons maintenant un cas plus compliqué où l'interaction met en jeu le moment angulaire propre du fluide. Nous considérerons une énergie de la forme $\frac{1}{2} s_{\mu\nu} (\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu)$ ou simplement $s_{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu$, terme que nous avons rencontré dans le fluide représentatif de l'équation de Dirac, à côté de ceux dépendant de la variable A. Si nous exprimons cette énergie dans le système propre, il vient, puisque les s_{k4}^0 et s_{4k}^0 sont nuls :

$$\frac{1}{2} s_{jk}^0 (\partial_j u_k - \partial_k u_j)^0 = \frac{1}{2} s_{jk}^0 [(\partial_j \nu_k)^0 - (\partial_k \nu_j)^0].$$

On voit figurer dans le crochet le tenseur « tourbillon » de l'hydrodynamique classique — qu'il ne faut pas confondre avec le tourbillon relativiste de M. Lichnerowicz (Appendice B) qui paraît difficile à exprimer dans le cas des fluides à spin. Si on exprime le tenseur d'espace s_{jk}^0 en fonction du spin (chapitre III), il vient : $\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma_i^0 [(\partial_j \nu_k)^0 - (\partial_k \nu_j)^0]$ soit : $\sigma_i^0 \varepsilon_{ijk} (\partial_j \nu_k)^0$.

Le lagrangien introduit, qui sera maximum lorsque σ_i^0 est parallèle au vecteur $\varepsilon_{ijk} (\partial_j \nu_k)^0$ exprime donc une interaction qui tend à rendre le spin parallèle au dual du tourbillon. C'est une telle interaction que Vigier, dans un article en cours de publication, a mis récemment en évidence dans le cas de la fonction d'onde du neutrino. En fonction du tétrapode a_μ^λ , elle prend la forme :

$$ic \rho h_0 (a_\mu^\lambda a_\nu^\lambda - a_\mu^\lambda a_\mu^\lambda) \partial_\mu a_\nu^\lambda$$

Le lagrangien du fluide est donc :

$$\mathcal{L} = \rho \mathcal{N}_0 c^2 + ic \rho a_\mu^\lambda \partial_\mu S + ic \rho h_0 a_\mu^\lambda a_\nu^\lambda \partial_\mu a_\lambda^\lambda + ic \rho h_0 (a_\mu^\lambda a_\nu^\lambda - a_\mu^\lambda a_\mu^\lambda) \partial_\mu a_\nu^\lambda + \lambda_{\mu\nu} (a_\mu^\lambda a_\nu^\lambda - \delta_{\mu\nu}) .$$

Pour chercher le moment angulaire interne, formons le tenseur de Belinfante au moyen des dérivées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{\alpha,\lambda}^2} &= ic\rho h_0 a_\lambda^4 a_\alpha^4 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{\alpha,\lambda}^4} &= ic\rho h_0 (a_\lambda^4 a_\alpha^2 - a_\alpha^4 a_\lambda^2).\end{aligned}$$

On a alors, en utilisant l'opérateur des transformations de Lorentz infinitésimales pour les vecteurs : $\mathcal{L}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}f_{\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{2} ic\rho h_0 a_\lambda^4 (a_\mu^4 a_\nu^2 - a_\nu^4 a_\mu^2) + \frac{1}{2} ic\rho h_0 a_\lambda^4 a_\mu^2 \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} a_\beta^4 - \frac{1}{2} ic\rho h_0 a_\alpha^4 a_\mu^2 \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} a_\beta^4 \\ &= \frac{1}{2} \rho h_0 [u_\lambda (a_\mu^4 a_\nu^2 - a_\nu^4 a_\mu^2) + a_\lambda^4 (a_\mu^2 u_\nu - a_\nu^2 u_\mu) - a_\lambda^2 (a_\mu^4 u_\nu - a_\nu^4 u_\mu)] \\ &= \frac{1}{2} \rho h_0 [u_\lambda (a_\mu^4 a_\nu^2 - a_\nu^4 a_\mu^2) + u_\nu (a_\lambda^4 a_\mu^2 - a_\mu^4 a_\lambda^2) - u_\mu (a_\lambda^4 a_\nu^2 - a_\nu^4 a_\lambda^2)].\end{aligned}$$

Soit, en introduisant l'expression de $s_{\mu\nu}$:

$$f_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} (s_{\mu\nu} u_\lambda + s_{\lambda\mu} u_\nu - s_{\lambda\nu} u_\mu).$$

Le moment angulaire interne est donné par :

$$-\frac{2}{c^2} f_{\mu\nu\lambda} u_\lambda = s_{\mu\nu}.$$

Il se trouve être simplement la densité liée au *moment angulaire des particules* (ce qui n'est nullement obligatoire dans le cas général, où les tensions peuvent intervenir dans l'expression du moment angulaire hydrodynamique). Il est donc orthogonal au courant (ce qui n'est pas non plus obligatoirement le cas de tout fluide formé de particules possédant chacune cette propriété). Nous remarquons que le tenseur de Belinfante ne se réduit pas à $\frac{1}{2} s_{\mu\nu} u_\lambda$ comme dans le fluide « matière pure ». Nous aurons donc à effectuer une transformation de jauge exprimée par :

$$\begin{aligned}\varphi_{\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{2} (s_{\lambda\mu} u_\nu - s_{\lambda\nu} u_\mu) \\ \Phi_{\mu\nu\lambda} &= s_{\nu\lambda} u_\mu.\end{aligned}$$

C'est la transformation que nous avons rencontrée dans le cas de Dirac.

Les équations d'Euler tirées du lagrangien sont respectivement :
Pour la variable ρ :

$$(V-27) \quad 3n_0 c^2 + \dot{S} + h_0 a_\lambda^4 \dot{a}_\lambda^2 + \frac{1}{\rho} s_{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu = 0.$$

D'où il résulte que : $\mathcal{L} = 0$.

Pour la variable a_μ^1 :

$$ic\rho h_0 a_\lambda^1 \partial_\lambda a_\mu^2 + ic\rho h_0 a_\alpha^2 (\partial_\mu a_\alpha^1 - \partial_\alpha a_\mu^1) + 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^1 = 0.$$

Pour la variable a_μ^2 :

$$\partial_\lambda (ic\rho h_0 a_\lambda^1 a_\mu^1) = -ic\rho h_0 a_\alpha^1 (\partial_\mu a_\alpha^1 - \partial_\alpha a_\mu^1) + 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^2 = 0$$

Pour la variable a_μ^3 :

$$2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^3 = 0.$$

Pour la variable a_μ^4 :

$$ic\rho \partial_\mu S + ic\rho h_0 a_\lambda^1 \partial_\mu a_\lambda^2 + 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^4 = \partial_\lambda [ic\rho h_0 (a_\lambda^1 a_\mu^2 - a_\lambda^2 a_\mu^1)].$$

Ces équations se transforment en :

$$\begin{aligned} \rho h_0 \dot{a}_\mu^2 + \rho h_0 a_\alpha^2 (\partial_\mu u_\alpha - \partial_\alpha u_\mu) + 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^1 &= 0 \\ -\rho h_0 \dot{a}_\mu^1 - \rho a_\mu^1 \dot{h}_0 - \rho h_0 a_\alpha^1 (\partial_\mu u_\alpha - \partial_\alpha u_\mu) + 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^2 &= 0 \\ 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^3 &= 0 \\ ic\rho \partial_\mu S + ic\rho h_0 a_\lambda^1 \partial_\mu a_\lambda^2 - ic\partial_\lambda s_{\lambda\mu} + 2\lambda_{\mu\alpha} a_\alpha^4 &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant ces équations respectivement par a_ν^1 , a_ν^2 , a_ν^3 , a_ν^4 , en ajoutant, et en prenant la partie antisymétrique en μ et ν du résultat — ce qui élimine les $\lambda_{\mu\nu}$ — on obtient :

$$\begin{aligned} \rho h_0 (\dot{a}_\mu^2 a_\nu^1 - \dot{a}_\nu^2 a_\mu^1) - \rho a_\mu^1 a_\nu^2 \dot{h}_0 - \rho h_0 (\dot{a}_\mu^1 a_\nu^2 - \dot{a}_\nu^1 a_\mu^2) + \rho a_\mu^1 a_\nu^2 \dot{h}_0 + \rho u_\nu \partial_\mu S - \rho u_\mu \partial_\nu S \\ + \rho h_0 a_\lambda^1 u_\nu \partial_\mu a_\lambda^2 - \rho h_0 a_\lambda^1 u_\mu \partial_\nu a_\lambda^2 + \rho h_0 [a_\alpha^2 a_\lambda^1 (\partial_\mu u_\alpha - \partial_\alpha u_\mu) - a_\alpha^2 a_\mu^1 (\partial_\nu u_\alpha - \partial_\alpha u_\nu) \\ - a_\alpha^1 a_\mu^2 (\partial_\mu u_\alpha - \partial_\alpha u_\mu) + a_\alpha^1 a_\nu^2 (\partial_\nu u_\alpha - \partial_\alpha u_\nu)] - u_\nu \partial_\lambda s_{\lambda\mu} + u_\mu \partial_\lambda s_{\lambda\nu} = 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne, en remarquant que les quatre premiers termes représentent la dérivée — $\dot{s}_{\mu\nu}$, et en contractant par u_μ :

$$-\dot{s}_{\mu\nu} u_\mu + \rho u_\nu \dot{S} + c^2 \rho \partial_\nu S + \rho h_0 (u_\nu a_\lambda^1 \dot{a}_\lambda^2 + c^2 a_\lambda^1 \partial_\nu a_\lambda^2) + \rho h_0 (a_\alpha^2 a_\nu^1 \dot{u}_\alpha - a_\alpha^1 a_\nu^2 \dot{u}_\alpha) - u_\nu u_\mu \partial_\lambda s_{\lambda\mu} - c^2 \partial_\lambda s_{\lambda\nu} = 0$$

Ce qui s'écrit :

$$s_{\mu\nu} \dot{u}_\mu + \rho (u_\nu \dot{S} + c^2 \partial_\nu S) + \rho h_0 a_\lambda^1 (u_\nu \dot{a}_\lambda^2 + c^2 \partial_\nu a_\lambda^2) + s_{\nu\alpha} \dot{u}_\alpha - u_\nu u_\mu \partial_\lambda s_{\lambda\mu} - c^2 \partial_\lambda s_{\lambda\nu} = 0.$$

On a en remplaçant $\dot{S}$ par sa valeur (27) :

$$\begin{aligned} -\rho (\mathcal{M}_0 c^2 u_\nu + h_0 a_\lambda^1 \dot{a}_\lambda^2 u_\nu + \frac{1}{\rho} s_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta u_\nu - c^2 \partial_\nu S) \\ + \rho h_0 a_\lambda^1 (u_\nu \dot{a}_\lambda^2 + c^2 \partial_\nu a_\lambda^2) - c^2 \partial_\lambda s_{\lambda\mu} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

D'où l'expression du gradient $\partial_\nu S$:

$$(V-28) \quad \rho \partial_\nu S = \frac{1}{c^2} s_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta \cdot u_\nu + \eta_{\beta\gamma} \partial_\alpha s_{\alpha\beta} + \rho \mathcal{M}_0 u_\nu - \rho h_0 a_\lambda^1 \partial_\nu a_\lambda^2.$$

Nous pouvons alors former le tenseur canonique d'énergie-impulsion. Il vient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_{,\nu}} \partial_\mu S = \rho u_\nu \partial_\mu S$$

soit d'après (28) :

$$\frac{1}{c^2} s_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta u_\mu u_\nu + \eta_{\beta\mu} s_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\nu + \rho \mathcal{N}_0 u_\mu u_\nu - \rho h_0 a_\lambda^4 u_\nu \partial_\mu a_\lambda^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{\lambda,\nu}^2} \partial_\mu a_\lambda^2 = \rho h_0 u_\nu a_\lambda^4 \partial_\mu a_\lambda^2$$

qui détruit le dernier terme de l'expression précédente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\lambda,\nu}} \partial_\mu u_\lambda = \rho h_0 (a_\lambda^4 a_\lambda^2 - a_\lambda^2 a_\lambda^4) \partial_\mu u_\lambda = s_{\nu\lambda} \partial_\mu u_\lambda.$$

D'où finalement :

$$t_{\mu\nu} = \rho \mathcal{N}_0 u_\mu u_\nu + s_{\nu\lambda} \partial_\mu u_\lambda + \partial_\lambda s_{\gamma\mu} u_\nu.$$

Pour rejoindre le formalisme de Weyssenhoff, il faut opérer la transformation de jauge : $t'_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} - \partial_\lambda \Phi_{\mu\nu\lambda}$.

$$t'_{\mu\nu} = \rho \mathcal{N}_0 u_\mu u_\nu + s_{\nu\lambda} \partial_\mu u_\lambda + \partial_\lambda s_{\gamma\mu} u_\nu - \partial_\lambda (u_\mu s_{\nu\lambda}) = \rho \mathcal{N}_0 u_\mu u_\nu + s_{\nu\lambda} (\partial_\mu u_\lambda - \partial_\lambda u_\mu) + u_\mu \partial_\lambda s_{\lambda\nu} + u_\nu \partial_\lambda s_{\lambda\mu}.$$

On décompose facilement ce tenseur sur le courant, ce qui fournit :
— l'impulsion (nous supprimons le signe '):

$$g_\mu = \rho \mathcal{N}_0 u_\mu + \partial_\lambda s_{\lambda\mu} - \frac{1}{c^2} \partial_\lambda s_{\lambda\nu} u_\nu u_\mu$$

— la partie non cinétique :

$$\tau_{\mu\nu} = s_{\nu\lambda} (\partial_\mu u_\lambda - \partial_\lambda u_\mu) + u_\mu \partial_\lambda s_{\lambda\nu} + \frac{1}{c^2} \partial_\lambda s_{\lambda\alpha} u_\alpha u_\nu u_\mu = s_{\nu\lambda} (\partial_\mu u_\lambda - \partial_\lambda u_\mu) + \eta_{\nu\alpha} \partial_\lambda s_{\lambda\alpha} u_\mu.$$

Cette dernière se décompose, suivant le formalisme de Takabayasi :
— en courant de chaleur :

$$q_\nu = -\frac{1}{c^2} s_{\nu\lambda} \dot{u}_\lambda + \eta_{\nu\alpha} \partial_\lambda s_{\lambda\alpha}$$

— et tenseur d'espace propre des tensions :

$$\theta_{\mu\nu} = s_{\nu\lambda} (\partial_\mu u_\lambda - \partial_\lambda u_\mu) + \frac{1}{c^2} u_\mu s_{\nu\lambda} \dot{u}_\lambda = s_{\nu\lambda} (\eta_{\mu\alpha} \partial_\alpha u_\lambda - \partial_\lambda u_\mu)$$

soit, en retranchant le terme nul : $\frac{1}{c^2} u_\alpha u_\mu \partial_\lambda u_\alpha = 0$

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} s_{\nu\lambda} (\partial_\alpha u_\lambda - \partial_\lambda u_\alpha)$$

Cette tension exprime bien un couplage entre le moment angulaire propre, qui est dans l'espace propre, et la projection sur l'espace propre du tenseur tourbillon, qui n'y est pas contenu en général.

A propos de cette expression, nous pouvons faire une remarque importante : contractons $\theta_{\mu\nu}$ par le tourbillon :

$$\theta_{\mu\nu}(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu) = s_{\gamma\lambda}\eta_{\mu\alpha}(\partial_\alpha u_\lambda - \partial_\lambda u_\alpha)(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu)$$

Il vient, en tenant compte des propriétés de $\eta_{\mu\alpha}$:

$$\theta_{\mu\nu}(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu) = s_{\gamma\lambda}\eta_{\mu\alpha}\partial_\alpha u_\lambda\partial_\mu u_\nu - s_{\gamma\lambda}\partial_\alpha u_\lambda\partial_\nu u_\alpha - s_{\gamma\lambda}\partial_\lambda u_\alpha\partial_\mu u_\nu + s_{\gamma\lambda}\partial_\lambda u_\mu\partial_\nu u_\alpha.$$

Le dernier terme est nul par antisymétrie. Le second et le troisième se détruisent après changement des indices muets. Il reste :

$$\theta_{\mu\nu}(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu) = s_{\gamma\lambda}\left(\delta_{\mu\alpha} + \frac{u_\mu u_\alpha}{c^2}\right)\partial_\alpha u_\lambda\partial_\mu u_\nu = s_{\gamma\lambda}\partial_\mu u_\lambda\partial_\mu u_\nu + \frac{1}{c^2}s_{\gamma\lambda}\dot{u}_\lambda\dot{u}_\nu.$$

Les deux termes sont nuls par antisymétrie. On a donc :

$$\theta_{\mu\nu}(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu) = 0.$$

Nous savons que $\theta_{\mu\nu}$ n'est pas le vrai tenseur des tensions. Mais nous pouvons écrire immédiatement :

(V-29)

$$\theta_{\mu\nu}\partial_\mu u_\nu = 0$$

relation qui subsiste pour le tenseur $\theta'_{\mu\nu}$ qui a la même partie antisymétrique que $\theta_{\mu\nu}$.

Nous devons effectuer maintenant la transformation annoncée dans notre étude du cas général, qui fasse disparaître le courant de chaleur. On posera alors :

$$\begin{aligned} g'_\mu &= g_\mu - q_\mu = \rho\mathcal{N}_0 u_\mu - \frac{1}{c^2}\partial_\lambda s_{\lambda\nu} u_\nu u_\mu + \frac{1}{c^2}s_{\mu\lambda}\dot{u}_\lambda - \frac{1}{c^2}\partial_\lambda s_{\lambda\alpha} u_\alpha u_\mu \\ &= \rho\mathcal{N}_0 u_\mu - \frac{2}{c^2}\partial_\lambda s_{\lambda\nu} u_\mu u_\nu + \frac{1}{c^2}s_{\mu\lambda}\dot{u}_\lambda \end{aligned}$$

$$g'_\mu = \left[\rho\mathcal{N}_0 + \frac{1}{c^2}s_{\lambda\alpha}(\partial_\lambda u_\alpha - \partial_\alpha u_\lambda)\right]u_\mu + \frac{1}{c^2}s_{\mu\lambda}\dot{u}_\lambda$$

relation qui met immédiatement en évidence la densité de masse propre :

$$\mu_0 = \rho\mathcal{N}_0 + \frac{1}{c^2}s_{\lambda\alpha}(\partial_\lambda u_\alpha - \partial_\alpha u_\lambda)$$

et l'impulsion transversale, avec l'expression ordinaire :

$$p'_\mu = -\frac{1}{c^2}s_{\mu\lambda}\dot{u}_\lambda.$$

On peut facilement écrire l'équation des couples, mais il est plus intéressant d'écrire les trois équations auxquelles elle se réduit en partant directement du cas général. On a ainsi, outre l'équation ordinaire :

$$g'_\mu \sigma_\mu = 0$$

$$\theta_{\mu\nu} s_{\mu\nu} = -s_{\mu\nu} s_{\lambda\gamma} (\eta_{\mu\alpha} \partial_\alpha u_\lambda - \partial_\lambda u_\mu) = (\sigma_\mu \sigma_\lambda - \sigma_\theta^2 \eta_{\mu\lambda}) (\eta_{\mu\alpha} \partial_\alpha u_\lambda - \partial_\lambda u_\mu)$$

soit, en tenant compte de ce que :

$$\eta_{\mu\alpha} \sigma_\mu = \sigma_\alpha \quad \text{et} \quad \eta_{\mu\lambda} \partial_\alpha u_\lambda = \partial_\mu u_\lambda ;$$

$$\theta_{\mu\nu} s_{\mu\nu} = \sigma_\alpha \sigma_\lambda \partial_\alpha u_\lambda - \sigma_\mu \sigma_\lambda \partial_\lambda u_\mu - \sigma_\theta^2 \eta_{\mu\lambda} \partial_\alpha u_\lambda + \sigma_\theta^2 \eta_{\mu\lambda} \partial_\lambda u_\mu = 0.$$

Il en résulte que :

$$\sigma_0 \dot{\sigma}_0 = 0.$$

Le module du spin est constant.

Enfin l'équation donnant l'évolution du spin s'écrit :

$$i c \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} s_{\nu\lambda} u_\alpha (\eta_{\mu\epsilon} \partial_\epsilon u_\lambda - \partial_\lambda u_\mu) = c^2 \eta_{\alpha\beta} \dot{\sigma}_\alpha,$$

L'expression $i c \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} s_{\nu\lambda} u_\alpha$ se transforme en :

$$\delta_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} u_\gamma \sigma_\delta u_\alpha \equiv u_\lambda (u_\beta \sigma_\mu - u_\mu \sigma_\beta) + c^2 (\delta_{\lambda\beta} \sigma_\mu - \delta_{\lambda\mu} \sigma_\beta) \equiv c^2 (\eta_{\lambda\beta} \sigma_\mu - \eta_{\lambda\mu} \sigma_\beta).$$

On a ainsi, au premier membre :

$$c^2 (\eta_{\lambda\beta} \sigma_\mu - \eta_{\lambda\mu} \sigma_\beta) (\eta_{\mu\alpha} \partial_\alpha u_\lambda - \partial_\lambda u_\mu) \equiv c^2 (\eta_{\lambda\beta} \sigma_\alpha \partial_\alpha u_\lambda - \eta_{\alpha\lambda} \sigma_\beta \partial_\alpha u_\lambda - \eta_{\lambda\beta} \sigma_\mu \partial_\lambda u_\mu + \sigma_\beta \partial_\lambda u_\lambda) \\ \equiv c^2 \eta_{\lambda\beta} (\sigma_\alpha \partial_\alpha u_\lambda - \sigma_\mu \partial_\lambda u_\mu - \dot{\sigma}_\lambda).$$

On a ainsi :

$$\eta_{\lambda\beta} (\sigma_\alpha \partial_\alpha u_\lambda - \sigma_\mu \partial_\lambda u_\mu - \dot{\sigma}_\lambda) = 0$$

ce qu'on peut développer en :

$$\dot{\sigma}_\beta + \frac{u_\lambda u_\beta}{c^2} \dot{\sigma}_\lambda = \sigma_\alpha \partial_\alpha u_\beta - \sigma_\mu \partial_\beta u_\mu - \frac{u_\beta}{c^2} \sigma_\mu \dot{u}_\mu.$$

On voit que les derniers termes des deux membres se détruisent, d'où finalement :

$$\dot{\sigma}_\beta = \sigma_\alpha (\partial_\alpha u_\beta - \partial_\beta u_\alpha)$$

Nous pouvons aussi appliquer la relation (29) à l'équation des couples.

On a, en contractant par $\partial_\mu u_\nu$:

$$\dot{s}_{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu = (g'_\mu u_\nu - g'_\nu u_\mu) \partial_\mu u_\nu - 2 \theta_{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu = -g'_\nu \dot{u}_\nu = 0.$$

On a donc la relation importante :

(V-30)

$$\dot{s}_{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu = 0$$

Nous devons enfin exprimer la tension corrigée :

$$\theta'_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + q_{\mu}u_{\nu} + q_{\nu}u_{\mu} = s_{\nu\lambda}(\eta_{\mu\alpha}\partial_{\alpha}u_{\lambda} - \partial_{\lambda}u_{\mu}) - \frac{1}{c^2} s_{\mu\lambda}\dot{u}_{\lambda}u_{\nu} - \frac{1}{c^2} s_{\nu\lambda}\dot{u}_{\lambda}u_{\mu} + \eta_{\mu\alpha}u_{\nu}\partial_{\lambda}s_{\lambda\alpha} + \eta_{\nu\alpha}u_{\mu}\partial_{\lambda}s_{\lambda\alpha}$$

ce qu'on met aisément sous la forme :

$$\theta'_{\mu\nu} = s_{\nu\lambda}(\partial_{\mu}u_{\lambda} - \partial_{\lambda}u_{\mu}) - \frac{1}{c^2} s_{\mu\lambda}\dot{u}_{\lambda}u_{\nu} + \partial_{\lambda}s_{\lambda\alpha}(\eta_{\mu\alpha}u_{\nu} + \eta_{\nu\alpha}u_{\mu})$$

On peut calculer la densité de force :

$$\begin{aligned} -\varphi'_{\mu} &= \partial_{\nu}\theta'_{\mu\nu} = \partial_{\nu}s_{\nu\lambda}(\partial_{\mu}u_{\lambda} - \partial_{\lambda}u_{\mu}) + s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\mu}u_{\lambda} + \partial_{\nu}\partial_{\lambda}s_{\lambda\alpha}(\eta_{\mu\alpha}u_{\nu} + \eta_{\nu\alpha}u_{\mu}) \\ &\quad + \partial_{\lambda}s_{\lambda\alpha}(\eta_{\mu\alpha}\partial_{\nu}u_{\nu} + \eta_{\nu\alpha}\partial_{\nu}u_{\mu}) + \partial_{\lambda}s_{\lambda\alpha}\left[u_{\nu}\partial_{\nu}\left(\frac{u_{\mu}u_{\alpha}}{c^2}\right) + u_{\mu}\partial_{\nu}\left(\frac{u_{\nu}u_{\alpha}}{c^2}\right)\right] \\ &\quad - \frac{1}{c^2}\dot{u}_{\lambda}s_{\mu\lambda} - \frac{1}{c^2}s_{\mu\lambda}\dot{u}_{\lambda}. \end{aligned}$$

La relation donnant la variation de la densité de masse donne :

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_0 c^2 &= u_{\mu}\partial_{\nu}\theta'_{\mu\nu} = \partial_{\nu}s_{\nu\lambda}\dot{u}_{\lambda} + s_{\nu\lambda}u_{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}u_{\lambda} - c^2\eta_{\nu\alpha}\partial_{\lambda}s_{\lambda\alpha} - \partial_{\lambda}s_{\lambda\alpha}\dot{u}_{\alpha} - \partial_{\lambda}s_{\lambda\alpha}u_{\alpha}\partial_{\nu}u_{\nu} \\ &= u_{\mu}(s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\mu}u_{\lambda} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}s_{\nu\lambda}u_{\lambda}) - \partial_{\nu}s_{\nu\lambda}(\dot{u}_{\lambda} + u_{\lambda}\partial_{\alpha}u_{\alpha}) \end{aligned}$$

Pour transformer le premier terme, dérivons en μ puis en ν la relation :

$$s_{\nu\lambda}u_{\lambda} = 0.$$

Il vient :

$$s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\mu}u_{\lambda} + \partial_{\nu}s_{\nu\lambda}\partial_{\mu}u_{\lambda} + \partial_{\mu}s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}u_{\lambda} = -s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\mu}u_{\lambda}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_0 c^2 &= -\partial_{\nu}s_{\nu\lambda}\dot{u}_{\lambda} - \partial_{\nu}s_{\nu\lambda}u_{\lambda}\partial_{\alpha}u_{\alpha} + u_{\mu}(2s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\mu}u_{\lambda} + \partial_{\nu}s_{\nu\lambda}\partial_{\mu}u_{\lambda} + \partial_{\mu}s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}u_{\lambda}) = \\ &\quad -\partial_{\nu}s_{\nu\lambda}u_{\lambda}\partial_{\mu}u_{\mu} + u_{\mu}\partial_{\mu}s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}u_{\lambda} + 2u_{\mu}s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\mu}u_{\lambda}. \end{aligned}$$

Comme on sait que :

$$\dot{s}_{\nu\lambda}\partial_{\nu}u_{\lambda} \equiv \partial_{\mu}(u_{\mu}s_{\nu\lambda})\partial_{\nu}u_{\lambda} = 0.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_0 c^2 &= \\ -\partial_{\nu}s_{\nu\lambda}u_{\lambda}\partial_{\mu}u_{\mu} - s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}u_{\lambda}\partial_{\mu}u_{\mu} + 2u_{\mu}s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\mu}u_{\lambda} &= -\partial_{\nu}(s_{\nu\lambda}u_{\lambda})\partial_{\mu}u_{\mu} + 2u_{\mu}s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\mu}u_{\lambda}. \end{aligned}$$

Le premier terme s'annule :

$$\dot{\mu}_0 c^2 = 2u_{\mu}s_{\nu\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\mu}u_{\lambda} = s_{\nu\lambda}\frac{d}{d\tau}(\partial_{\nu}u_{\lambda} - \partial_{\lambda}u_{\nu})$$

Si on compare cette relation avec celle qu'on obtient en dérivant l'expression de $\mu_0 c^2$:

$$\dot{\mu}_0 c^2 = \rho \mathcal{D} \dot{\mu}_0 c^2 + \frac{d}{d\tau} [s_{\nu\lambda}(\partial_{\nu}u_{\lambda} - \partial_{\lambda}u_{\nu})]$$

ou, en tenant compte de (30) :

$$\dot{\mu}_0 c^2 = \rho \mathfrak{M}_0 c^2 + s_{\nu\lambda} \frac{d}{d\tau} (\partial_\nu u_\lambda - \partial_\lambda u_\nu).$$

On voit qu'elle exprime simplement que la masse propre particulière correspondant au fluide matière pure $\mathfrak{M}_0$ est *constante*. Autrement dit, la masse propre liée à l'énergie *cinétique* des mouvements internes de la goutte est invariable au cours du mouvement. Seule varie — en fonction du travail des tensions — la masse propre liée à l'énergie *potentielle* de la goutte en rotation dans le champ des tensions. Et sa variation dépend uniquement des variations du tourbillon local, auquel est couplé le moment angulaire interne. Remarquons que, puisque s_{kk}^0 et s_{ik}^0 sont nulles dans le système propre, le tourbillon qui intervient est, en fait, le tenseur d'espace propre de l'hydrodynamique non relativiste, et non le tourbillon relativiste de M. Lichnerowicz.

APPENDICE A

§ 1. Variances et dérivées totales hydrodynamiques.

Les concepts fondamentaux qui sont à la base de l'hydrodynamique relativiste sont des *densités d'univers* qui ont par définition la variance de densités tensorielles. Les plus importantes que nous rencontrerons sont la densité de matière ρ qui est une densité scalaire, la densité de courant j_μ , la densité d'impulsion g_μ qui sont des densités vectorielles, la densité de spin σ_μ qui est un vecteur, la densité de moment angulaire interne $s_{[\mu\nu]}$ et le tenseur densité d'énergie-impulsion $t_{\mu\nu}$. Comme nous n'utiliserons que les transformations du groupe *propre* de Lorentz et n'aurons pas affaire à des réflexions ou à des renversements du temps, nous nommerons les grandeurs ci-dessus des tenseurs en faisant abstraction du caractère densitaire de certaines d'entre elles pour simplifier le langage.

On obtient à partir de ces densités tensorielles d'univers, des quantités globales ayant une variance tensorielle simple en les intégrant sur un domaine d'univers déterminé. A partir de densité f , f_μ , $f_{\mu\nu}$, on obtient ainsi des tenseurs $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_\mu$, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$. Mais ce ne sont pas ces tenseurs qui ont une signification physique. Les grandeurs physiques sont les intégrales des densités d'univers prises sur un certain volume d'espace occupé par un certain corps matériel à un instant donné, intégrales qui ne possèdent que très exceptionnellement une variance relativiste simple. Comme l'a fait remarquer M. Louis de Broglie « c'est là un exemple des oppositions assez fréquentes qui se présentent entre idées quantiques et idées relativistes » (1). Que l'on veuille construire un modèle physique de la théorie causale, ou former les opérateurs de l'interprétation probabiliste, on devra faire correspondre aux densités tensorielles f , f_μ , $f_{\mu\nu}$, d'autres grandeurs globales que nous désignerons par F , F_μ , $F_{\mu\nu}$ et qui seront des intégrales d'espace.

Il sera parfois commode, pour l'expression des densités caractérisant un fluide, de considérer celui-ci comme constitué par un grand nombre de particules ponctuelles dont les propriétés s'expriment au moyen de grandeurs *particulaires* F , F_μ , $F_{\mu\nu}$, tensorielles par définition. On doit alors supposer : d'une part que chacune de ces grandeurs varie de façon continue lors qu'on considère des particules voisines, d'autre part que ces particules sont réparties avec une densité moyenne variant elle aussi de façon continue. On considère en un point P du fluide le *référentiel propre* Σ_0 attaché à la particule qui se trouve en P. Dans l'espace de ce référentiel, on considère un élément de volume (propre) d_3v_0 contenant d_3n particules et on définit la « densité de matière » par $\rho = d_3n/d_3v_0$.

On a $d_3n = \rho d_3v_0 = \rho d_3v_0 d\tau/d\tau$, $d\tau$ étant le temps propre. Mais $d_3v_0 d\tau$ est l'élément d'univers d_4w qui est invariant pour une transformation de Lorentz, la contraction du volume compensant exactement la dilatation du temps. Comme d_3n , représentant un nombre donné de particules, est également invariant, on voit que $\rho/d\tau$ et par conséquent ρ , est un invariant d'univers. Le fluide sera alors caractérisé par les densités ρF , ρF_μ , $\rho F_{\mu\nu}$.

Avant toute étude dynamique, nous devons exprimer le pur et simple état de mouvement du fluide en définissant en chaque point la *vitesse* de la matière. Pour définir la vitesse unitaire relativiste, nous considérons dans un référentiel de Lorentz quelconque la vitesse $\mathbf{v}$ que possède par rapport à ce référentiel la particule matérielle se trouvant au point P considéré à l'instant considéré et nous formons les quatre composantes

$$u_i = \alpha v_i \quad u_4 = \alpha ic \quad \text{avec} \quad \alpha = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

On sait que dans ces conditions les u_μ se transforment lors d'une transformation de Lorentz comme les composantes d'un vecteur d'univers, et qu'ils représentent les dérivées $u_\mu = dx_\mu/d\tau$ des coordonnées relativistes de la particule par rapport au temps propre local τ . On sait aussi que la norme de toute vitesse unitaire est $u_\mu u_\mu = -c^2$.

Il faut faire intervenir la vitesse unitaire dans la définition de toutes les propriétés du fluide, qu'il s'agisse de propriétés moyennes locales, ou de propriétés attachées à une quantité déterminée de fluide. En effet, toute propriété physique objective est liée à la matière elle-même, à chacune de ses parties distinctes qui doit pouvoir être suivie et identifiée au cours du mouvement de la matière. Ce qui a un sens physique, ce n'est pas purement et simplement, par exemple, l'impulsion au point P à l'instant t , mais plus précisément, l'impulsion de la particule maté-

rielle qui se trouve au point P à l'instant t , mais qui possède une vitesse bien déterminée, laquelle l'amènera à l'instant t' en un point P' bien déterminé. On doit donc obligatoirement compléter par des précisions cinématiques la représentation des propriétés du fluide par des grandeurs de champ.

Ainsi il est utile mathématiquement de considérer — dans un référentiel donné — les variations locales d'une grandeur $f_{(xyz,t)}$ à un instant donné, ou sa variation au cours du temps en un point donné — variations qui s'exprimeront par les dérivées partielles ordinaires de l'analyse tensorielle, avec leurs combinaisons covariantes : gradient, divergence, rotationnel, dalembertien, etc... Mais il est évident qu'on n'atteindra des réalités physiques qu'en recherchant les variations que subit la grandeur f attachée à une certaine particule du fluide, lorsqu'on suit cette particule dans son mouvement. On est ainsi amené à attribuer la plus grande importance à des procédés de *dérivation totale effectuée le long d'une ligne d'univers suivie par la particule*.

On peut ainsi, avec Weyssenhoff ⁽²⁾ définir deux sortes de dérivations :

D'une part, pour une grandeur globale relativiste $\mathcal{F}$ exprimant les propriétés d'un corpuscule ou d'un domaine quadri-dimensionnel découpé dans le fluide, la dérivée totale le long d'une ligne de courant est :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\tau} = u_\mu \partial_\mu \mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Cette expression est une généralisation de la dérivation lagrangienne de la dynamique non relativiste, soit

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = v_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}.$$

On a en effet $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = ic \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^4}$ soit, en posant $\alpha = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\tau} = \alpha \frac{d\mathcal{F}}{dt} = \alpha (\nu_i \partial_i \mathcal{F} + ic \partial_4 \mathcal{F}) = \alpha \nu_\mu \partial_\mu \mathcal{F} = u_\mu \partial_\mu \mathcal{F}.$$

Nous désignerons souvent cette dérivée par un point :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{F}}{d\tau} = u_\mu \partial_\mu \mathcal{F} = \dot{\mathcal{F}}.}$$

Il faudra dans ce cas toujours faire attention au fait que $\mathcal{F}$ doit représenter une grandeur intégrée sur un domaine *infinitésimal*, condition nécessaire pour qu'il n'y ait pas d'équivoque sur le point dont on suit

le mouvement, et donc sur la vitesse u_μ que l'on doit considérer. Quand nous serons amenés à étudier des grandeurs globales intégrées sur un domaine fini, il sera indispensable de spécifier en quel point du volume fluide considéré on doit attacher cette grandeur et de prendre comme coefficient u_μ la vitesse unitaire *de ce point*. Dans ce cas, du reste, le point choisi ne coïncidera pas en général au cours de son mouvement, avec une même particule de fluide.

Si d'autre part on a affaire à une *densité* d'univers f , on considère en un point P quatre vecteurs infinitésimaux non colinéaires δx^a , δx^b , δx^c , δx^d et on forme un domaine infinitésimal d'univers $\delta\omega$ au moyen de leur produit antisymétrique. Si on considère que les extrémités de ces quatre vecteurs sont des points matériels au même titre que P et se déplacent avec le fluide, l'élément $\delta\omega$ pourra être suivi au cours du mouvement, et le produit $f\delta\omega$ représentera une quantité déterminée de la même nature que la grandeur $\mathcal{F}$ étudiée plus haut, soit $f\delta\omega = \delta\mathcal{F}$.

Au bout d'un temps $d\tau$, cette quantité $\delta\mathcal{F}$ subira une variation $d(\delta\mathcal{F})$ que nous exprimons d'après ce qui vient d'être dit par

$$d(\delta\mathcal{F}) = u_\mu \partial_\mu (\delta\mathcal{F}) d\tau.$$

Elle vaut d'autre part

$$d(f\delta\omega) = u_\mu \partial_\mu f d\tau \delta\omega + f d(\delta\omega).$$

La variation $d(\delta\omega)$ de l'élément d'univers dans l'intervalle de temps propre $d\tau$ est déterminée par celles des vecteurs infinitésimaux qui le constituent. Par exemple le vecteur δx^1 dont les deux extrémités ont des vitesses d'univers u_μ et $u_\mu + \frac{\partial u_\mu}{\partial x^1} \delta x^1$ subit une variation $\frac{\partial u_\mu}{\partial x^1} \delta x^1 d\tau$, et il est facile de voir que le produit antisymétrique $\delta\omega$ subira une variation $\frac{\partial u_\mu}{\partial x^\mu} \delta\omega d\tau$ (avec sommation sur μ). Au total on a :

$$u_\mu \partial_\mu (\delta\mathcal{F}) d\tau = u_\mu \partial_\mu f \delta\omega d\tau + f \partial_\mu u_\mu \delta\omega d\tau$$

ou

$$\frac{d}{d\tau} (\delta\mathcal{F}) = (u_\mu \partial_\mu f + f \partial_\mu u_\mu) \delta\omega = \partial_\mu (u_\mu f) \delta\omega.$$

On peut ainsi définir pour la densité f une « densité de dérivée » le long d'une ligne de courant en posant

$$\frac{d(f\delta\omega)}{d\tau} = \frac{df}{d\tau} \delta\omega$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{df}{d\tau} = \partial_\mu (u_\mu f)}.$$

Nous désignerons également cette dérivée par un point :

$$\frac{df}{d\tau} = \delta_\mu(u_\mu f) = \dot{f}$$

en nous rappelant que le point n'a pas la même signification pour une grandeur globale du type $\mathcal{F}$ et pour une densité du type f .

Bien entendu, rien n'est changé dans les définitions précédentes, si $\mathcal{F}$ ou f sont des vecteurs $\mathcal{F}_\mu$ ou f_μ , ou des tenseurs.

§ 2. Lois de conservation.

La signification physique fondamentale de ces dérivations le long d'une ligne de courant apparaît lorsqu'on veut exprimer la permanence physique — ou la conservation — d'une grandeur attachée à un fragment de matière. Soit par exemple une densité invariante f . Pour définir la grandeur globale correspondante pour un petit élément matériel du fluide, nous devons intégrer f , non pas sur un élément d'univers, comme nous l'avons fait formellement tout à l'heure, mais sur un élément de volume d'espace, car la matière est un continuum du genre espace, et seule une quantité de matière en mouvement, délimitée par un certain volume d'espace, et les propriétés physiques de cette quantité de matière, présentent une signification physique. Nous devons donc revenir, de la représentation mathématique formelle dans l'univers à quatre dimensions, à la considération de domaines à trois dimensions du genre espace, qui subiront des variations relativistes lors d'un changement du système de référence.

Ainsi nous définirons sans ambiguïté la grandeur physique F attachée à une gouttelette infinitésimale de matière en multipliant la densité d'univers f par l'élément de volume propre dV_0 et en intégrant sur le volume propre V_0 de la gouttelette

$$F = \int_{V_0} f dV_0.$$

On voit alors que la conservation de la quantité F pour la gouttelette au cours de son mouvement s'exprime par la condition $\dot{F} = 0$.

En effet considérons l'expression de cette dérivée :

$$\dot{F} = \delta_\mu(f u_\mu).$$

Multiplions-là par l'élément d'univers $d\omega$ et intégrons sur un élément de tube de courant engendré par des lignes de courant formant une « hyperparoi », et limité par deux « hypercloisons » C_1 et C_2 orthogonales au

courant et constituant ainsi deux coupes d'espace propre, ou, si on veut, deux représentations instantanées de la gouttelette aux instants 1 et 2.

On peut alors appliquer le théorème de Gauss :

$$\int_{\Sigma} \partial_{\mu}(fu_{\mu})d\omega = \int_{\Sigma} fu_{\mu}d\sigma_{\mu}.$$

Où Σ désigne l'hypersurface fermée délimitant l'élément de tube, et $d\sigma_{\mu}$ l'élément d'aire de cette hypersurface, autrement dit le vecteur infinitésimal normal à l'hypersurface.

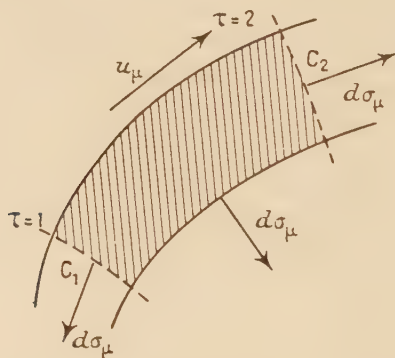
On peut décomposer l'intégrale en trois parties :

1) Sur l'hyperparoi engendrée par les lignes de courant, $d\sigma_{\mu}$ est en tout point orthogonal à u_{μ} : $d\sigma_{\mu}u_{\mu}=0$, la contribution de l'hyperparoi à l'intégrale est nulle.

2) Sur l'hypercloison C_2 , $d\sigma_{\mu}$ est en chaque point colinéaire à u_{μ} et de même sens, on a $d\sigma_{\mu}=u_{\mu}dV_0$, dV_0 étant l'élément de volume propre. D'où une contribution :

$$\int_{V_0(2)} fu_{\mu}u_{\mu}dV_0 = -c^2 \int_{V_0(2)} fdV_0.$$

3) Sur l'hypercloison C_1 , on a le même résultat, à ceci près que $d\sigma_{\mu}$



est maintenant orienté en sens contraire : $d\sigma_{\mu} = -u_{\mu}dV_0$ et on obtient une contribution

$$+c^2 \int_{V_0(1)} fdV_0.$$

L'intégrale d'univers sur l'hypertube se réduit ainsi à

$$\int_{\Sigma} \partial_{\mu}(fu_{\mu})d\omega = c^2 \int_{V_0(1)} fdV_0 - c^2 \int_{V_0(2)} fdV_0.$$

c'est-à-dire à la variation de la quantité

$$F = \int_{V_0} f dV_0$$

lorsque la gouttelette passe de l'instant 1 à l'instant 2, soit

$$\int_{\Omega} \dot{f} d\omega = c^2(F_1 - F_2).$$

Si les deux cloisons C_1 et C_2 correspondent à un intervalle de temps infiniment petit, cette égalité peut s'écrire :

$$-c^2 \left(\int_{V_0} \dot{f} dV_0 \right) d\tau = -c^2 \frac{dF}{d\tau} d\tau \quad \text{puisque} \quad d\omega = -c^2 dV_0 d\tau$$

d'où finalement :

$$\boxed{\int_{V_0} \dot{f} d\omega = \frac{dF}{d\tau}}.$$

Si $\dot{f} = 0$, l'intégrale est nulle et la quantité globale F attachée à la gouttelette se conserve au cours du mouvement.

Ce raisonnement, auquel nous nous référerons fréquemment, est également valable si f est un vecteur f_μ ou un tenseur $f_{\mu\nu}$.

Nous ne l'emploierons jamais sans certaines précautions. En effet, il convient de remarquer que nous avons attribué une variance tensorielle bien déterminée aux quantités.

$$\begin{array}{ll} f & \text{et} \quad \mathcal{F} = f d\omega, \text{ qui sont des scalaires,} \\ f_\mu & \text{et} \quad \mathcal{F}_\mu = f_\mu d\omega, \text{ qui sont des vecteurs,} \\ f_{\mu\nu} & \text{et} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} d\omega, \text{ qui sont des tenseurs.} \end{array}$$

Mais, comme nous l'avons fait remarquer, il est difficile d'attribuer une signification physique claire à ces grandeurs. Ce qui représente les propriétés physiques usuelles de la matière, ce sont les intégrales de *volume* de f , f_μ , $f_{\mu\nu}$, soit F , F_μ , $F_{\mu\nu}$, et en fait c'est seulement à partir de ces grandeurs que l'on peut attribuer un sens physique aux densités f , f_μ , $f_{\mu\nu}$ elles-mêmes, qui sont à considérer de ce point de vue comme les densités de *volume* des grandeurs *physiques* F , F_μ , $F_{\mu\nu}$, alors que nous leur avons attribué par définition la *variance* de densités d'univers.

En général, l'intégrale de volume d'une densité tensorielle d'univers n'est pas un tenseur. En effet, si nous appliquons sans précaution le procédé ordinaire de la physique non relativiste pour définir une quantité globale telle que F caractérisant une certaine masse de fluide, nous nous plaçons dans un référentiel déterminé, et nous intégrons la densité

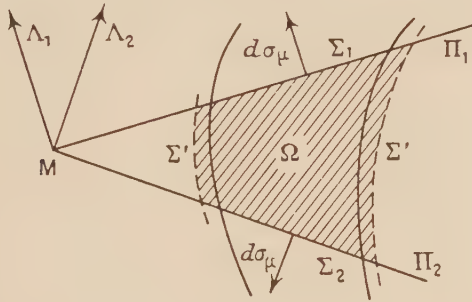
f sur le volume de fluide considéré à un instant donné. Au point de vue relativiste, cela revient à pratiquer dans l'hypertube d'univers balayée par la masse fluide, une coupe du genre espace particulière à notre référentiel et définie par une valeur constante de notre temps particulier. L'hyperplan d'espace Π orthogonal à l'axe de temps Λ définit ainsi une hypersurface d'intégration Σ , autrement dit un volume instantané de la masse fluide, sur lequel on effectue l'intégration. L'intégrale obtenue étant une somme de (pseudo) vecteurs infinitésimaux, il semble que l'on doive obtenir un vecteur. Mais si nous changeons de référentiel, il n'en résulte pas seulement les transformations de Lorentz ordinaires sur les éléments différentiels, mais le changement de l'hyperplan d'espace Π fera que la coupe du genre espace que nous serons amenés à pratiquer sur l'hypertube ne sera plus la même coupe que précédemment, le domaine d'intégration changera et la nouvelle quantité ne sera pas liée à l'ancienne par les relations de Lorentz, elle n'aura pas la variance d'un vecteur. Ou encore, suivant l'expression de M. Louis de Broglie, relativement à chaque référentiel, on aura à considérer un vecteur différent ⁽¹⁾.

Un moyen évident d'éviter cette difficulté consiste à définir une fois pour toutes et *de façon invariante* la coupe qu'on pratiquera dans l'hypertube. Cette coupe étant une hypersurface intrinsèque définie indépendamment du référentiel, les tenseurs qu'on obtiendra en intégrant sur elle seront aussi définis indépendamment du référentiel. C'est ce que nous avons fait tout à l'heure en considérant l'espace *propre* lié au mouvement local du fluide et en intégrant à chaque instant sur le volume propre de la gouttelette. Ce procédé ne paraît applicable que dans le cas d'une masse fluide *infinitésimale* car un même hyperplan Π ne peut être orthogonal au courant en tout point d'une masse fluide finie, et il ne semble pas possible de le généraliser. On peut penser, dans le cas d'un hypertube macroscopique, à considérer une hypercloison non plane qui serait en chaque point tangente à l'espace propre *local*, mais les intégrales obtenues n'auraient pas de signification physique claire car, pour reprendre une expression de M. Louis de Broglie, « il est physiquement naturel, et même presque nécessaire de définir les tenseurs dans chaque système galiléen à l'aide d'une cloison dont tous les points sont simultanés dans un même système de référence » ⁽¹⁾. De plus dans le cas des mouvements tourbillonnaires, qui est justement celui des fluides à spin, de telles surfaces orthogonales au faisceau des lignes de courant, ne sont pas à détermination unique et l'intégration sera impossible.

§ 3. Intégrales de volume covariantes. Théorème de Möller.

Il existe cependant, dans le cas d'une masse fluide macroscopique, certaines intégrales de volume qui sont tensorielles indépendamment de l'hyperplan d'espace sur lequel on intègre. Ceci est la conséquence d'un théorème important dû à Möller ⁽³⁾. Considérons d'abord le cas le plus simple, celui d'une densité vectorielle j_μ — exprimant une certaine propriété de la matière — et supposons qu'en vertu d'une loi cinématique ou dynamique, ce vecteur soit *conservatif*: $\partial_\nu j_\mu = 0$.

Alors l'intégrale sur une hypercloison d'espace Σ , de la composante de temps j_4 est *invariante* vis-à-vis d'une transformation de Lorentz, celle-ci s'accompagnant naturellement d'une modification de l'hypercloison, comme nous l'avons dit.



Pour faire la démonstration, plaçons l'origine commune des référentiels en un point d'univers M que nous choisirons par exemple hors de l'hypertube et considérons deux hyperplans d'espace Π_1 et Π_2 qui couperont l'hypertube suivant deux hypercloisons Σ_1 et Σ_2 et définiront deux référentiels de Lorentz $\Pi_1\Lambda_1$ et $\Pi_2\Lambda_2$. Les cloisons Σ_1 et Σ_2 délimiteront un certain tronçon de l'hypertube et nous formerons une surface fermée en complétant les deux cloisons par une hyperparoi Σ' située tout entière hors de la matière et sur laquelle par conséquent le vecteur j_μ est nul. L'ensemble emprisonnera un domaine d'univers Ω sur lequel nous intégrerons.

Considérons la relation de conservation $\partial_\nu j_\mu = 0$, multiplions le premier membre par l'élément d'univers $d\omega$ et intégrons sur le domaine Ω :

$$\int_{\Omega} \partial_\nu j_\mu d\omega = 0.$$

On peut appliquer le théorème de Gauss, en décomposant l'hyper-

surface qui limite Ω en ses trois parties $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma'$:

$$\int_{\Sigma_1} j_\mu d\sigma_\mu + \int_{\Sigma_2} j_\mu d\sigma_\mu + \int_{\Sigma'} j_\mu d\sigma_\mu = 0.$$

Le dernier terme (terme d'hyperparoi) est nul puisque Σ' est entièrement dans le vide. Par ailleurs chaque élément $j_\mu d\sigma_\mu$ étant un scalaire, on peut l'évaluer dans n'importe quel référentiel. Pour la première intégrale, nous rapporterons les vecteurs au référentiel $\Pi_1 \Lambda_1$. Alors on voit que $d\sigma_\mu$ est parallèle à l'axe du temps Λ_1 et a pour composantes

$$0, 0, 0, d\sigma_4^{(1)} = icdV_1$$

dV_1 étant l'élément de volume de l'hyperplan Π_1 . On a donc :

$$(j_\mu d\sigma_\mu)^{(1)} = icj_4^{(1)} dV_1.$$

De même, pour la deuxième intégrale nous utilisons le référentiel $\Pi_2 \Lambda_2$ et on aura un résultat correspondant, à ceci près, que $d\sigma_\mu$ sera dirigé en sens contraire, si bien qu'on aura

$$d\sigma_4^{(2)} = -icdV_2.$$

On aura donc finalement :

$$ic \int_{\Sigma_1} j_4^{(1)} dV_1 - ic \int_{\Sigma_2} j_4^{(2)} dV_2 = 0.$$

Autrement dit la quantité

$$\int_{\Sigma} j_4 dV = icJ$$

sera un invariant indépendant du référentiel et de l'hypercloison qui lui correspond. Le résultat n'est du reste pas modifié si on choisit l'origine M à l'intérieur du tube.

On peut facilement montrer que la quantité globale J est également *constante dans le temps*. Considérons un référentiel quelconque et son temps $ict = x_4$.

On a :

$$\frac{dJ}{dt} = ic \frac{dJ}{dx_4} = \frac{d}{dx_4} \int_{\Sigma} j_4 dV = \frac{d}{dx_4} \int_{\infty} j_4 dV$$

car on peut, si l'on veut, intégrer sur tout l'espace. D'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{\infty} \partial_4 j_4 dV.$$

La relation de conservation $\partial_\mu j_\mu = 0$ permet de remplacer $\partial_4 j_4$ par $-\partial_k j_k$ et on a ainsi une intégrale de *volume*

$$\frac{dJ}{dt} = - \int_{\infty} \partial_k j_k dV$$

que l'on peut, en vertu du théorème de Gauss, transformer en intégrale de surface $\int_S j_k ds_k$. Or la surface S renvoyée à l'infini sur l'hyperplan d'espace Π se trouve entièrement dans le vide, et l'intégrale est nulle. On a donc bien

$$\frac{dJ}{dt} = 0$$

quel que soit le temps utilisé.

On a donc un premier théorème : l'intégrale de volume $\int_{\Sigma} j_4 dV$ de la composante de temps d'un vecteur *conservatif* est un *scalaire*, constant au cours du temps.

Il est facile de généraliser ces propriétés au cas d'un tenseur. Considérons par exemple le tenseur du deuxième ordre conservatif $t_{\mu\nu}$, pour lequel on a : $\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$.

Nous introduisons un champ auxiliaire vectoriel *arbitraire* k_μ que nous supposons *uniforme* et nous formons en chaque point le vecteur

$$f_\nu = k_\mu t_{\mu\nu}.$$

Il est conservatif car

$$\partial_\nu f_\nu = k_\mu \partial_\nu t_{\mu\nu} + t_{\mu\nu} \partial_\nu k_\mu.$$

Le premier terme est nul puisque $\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$, le second aussi puisque k_μ est uniforme : $\partial_\nu k_\mu = 0$.

On peut donc appliquer le théorème précédent et conclure que

$$icF = \int_{\Sigma} k_\mu t_{\mu 4} dV$$

est un scalaire. Mais, comme k_μ est uniforme, on a aussi bien

$$icF = k_\mu \int_{\Sigma} t_{\mu 4} dV$$

ou, en posant $icG_\mu = \int_{\Sigma} t_{\mu 4} dV$: $F = k_\mu G_\mu = \text{scalaire}$.

Mais comme k_μ est un vecteur *arbitraire* à condition qu'il soit uniforme, on voit, d'après le critérium de tensorialité, que la relation qui vient d'être établie démontre que G_μ est un *vecteur* relativement à une transformation de Lorentz. De plus, comme, en vertu du théorème précédent $\frac{dF}{dt} = 0$ et que k_μ , étant uniforme, doit évidemment du point de vue relativiste, être aussi constant dans le temps, on a également

$$\frac{dG_\mu}{dt} = 0$$

Enfin la démonstration est exactement la même dans le cas d'un tenseur conservatif du troisième ordre — soit $m_{\mu\nu\lambda}$ avec $\partial_\lambda m_{\mu\nu\lambda} = 0$. Il suffira de multiplier par un tenseur arbitraire uniforme $k_{\mu\nu}$ de second ordre, et on verra tout de suite que l'intégrale

$$icM_{\mu\nu} = \int_{\Sigma} m_{\mu\nu\lambda} dV$$

est un tenseur de deuxième ordre constant dans le temps.

On a donc le théorème général : l'intégrale d'espace de la quatrième composante d'un tenseur *conservatif* est un tenseur constant au cours du temps dont l'ordre est inférieur d'une unité.

Sous cette forme, la démonstration de Möller ne nous semble pas irréprochable, car on ne peut pas sans précautions appliquer le théorème de Gauss à l'intégrale d'une grandeur qui subit une discontinuité sur une surface intérieure au domaine d'intégration, comme c'est le cas pour les quantités j_μ , $t_{\mu\nu}$, $m_{\mu\nu\lambda}$ sur l'hypersurface du tube balayé par la matière. On peut naturellement supposer que la matière est séparée du vide, non par une discontinuité brusque, mais par une « couche de passage » où les grandeurs matérielles s'évanouissent progressivement. Mais pour que les équations de conservation telles que

$$\partial_\mu j_\mu = 0 \quad \partial_\nu t_{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\lambda m_{\mu\nu\lambda} = 0$$

demeurent valables dans la couche de passage — ce qui est essentiel à la démonstration — il faut que soient réalisées des conditions particulières auxquelles doivent obéir les quantités j_μ , $t_{\mu\nu}$, $m_{\mu\nu\lambda}$ dans la couche de passage, et qui, si l'épaisseur de celle-ci tend vers zéro, se traduiront par des conditions aux limites propres à la surface de la goutte. Il nous paraît alors plus suggestif de considérer effectivement une surface de discontinuité caractérisée par des propriétés physiques particulières, et d'appliquer le raisonnement de Möller à l'hypertube balayé par la matière, la paroi Σ' étant, non plus dans le vide, mais *engendrée par la surface même de la goutte*. Dans ces conditions, l'application du théorème de Gauss devient légitime. Par contre, les intégrales de paroi

$$\int_{\Sigma'} j_\mu d\sigma_\mu \quad \int_{\Sigma'} k_\mu t_{\mu\nu} d\sigma_\nu \quad \int_{\Sigma'} k_{\mu\nu} m_{\mu\nu\lambda} d\sigma_\lambda$$

ne sont pas automatiquement nulles et le théorème de Möller ne s'applique que dans les cas où, en raison des conditions de surface déterminées par des phénomènes physiques, il se trouve que les intégrales de paroi sont nulles. Nous aurons à examiner cet aspect du problème chaque fois que nous tenterons de faire appel au théorème de Möller.

De même, il faut reprendre la démonstration que des quantités telles que J ou $k_\mu G_\mu$ sont constantes dans le temps, car les intégrales sont prises maintenant sur des domaines qui varient au cours du temps. Ainsi :

$$\frac{dJ}{dt} = ic \frac{d}{dx^4} \int_{\Sigma} j_4 dV$$

donne, d'après une formule classique :

$$ic \int_{\Sigma} \partial_4 j_4 dV + \int_S j_4 \nu_k ds_k$$

ν_k étant la vitesse de la matière sur la surface S de la goutte et dans le référentiel $\Pi\Lambda$.

L'équation $\partial_\mu j_\mu = 0$ permet alors d'écrire :

$$\int_{\Sigma} \partial_4 j_4 dV = - \int_{\Sigma} \partial_k j_k dV$$

ce qui se transforme en une intégrale de surface $-\int_S j_k ds_k$ et on a finalement :

$$\frac{dJ}{dt} = \int_S (j_4 \nu_k - ic j_k) ds_k.$$

Il faut alors examiner dans chaque cas et à la lumière de considérations physiques si cette intégrale est nulle.

APPENDICE B

§ 1. Hydrodynamique relativiste des fluides classiques.

Il nous a paru utile de rappeler dans cet appendice l'établissement des équations relativistes de l'hydrodynamique classique. On sait que les fluides quelconques de l'hydrodynamique non relativiste obéissent d'une part à l'équation de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m) + \partial_j (\rho m v_j) = 0$$

d'autre part aux trois équations d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m v_i) + \partial_j (\rho m v_i v_j + \tau_{ij}) = F_i.$$

F_i est la densité de force, ou force extérieure par unité de volume. Le fluide est le siège de tensions internes représentées par le tenseur τ_{ij} symétrique en i et j : τ_{ij} est la composante suivant l'axe x_i de la force de tension qui s'exerce sur une section d'aire unité orthogonale à l'axe x_j . On exprime ceci tensoriellement en disant que sur l'élément d'aire de mesure dS , représentée par le vecteur infinitésimal $d\sigma_k$ s'exerce une force de tension

$$T_j dS = \tau_{jk} d\sigma_k = \tau_{jk} d\sigma_k.$$

On sait également que les tensions produisent sur un petit élément de volume $d\nu$ une force de volume égale à

$$\varphi_j d\nu = - \partial_k \tau_{jk} d\nu$$

si bien que le tenseur τ_{jk} joue également le rôle d'un potentiel pour les forces de tensions par unité de volume. Remarquons enfin qu'on a écrit la densité de masse ρm sous forme d'un produit d'une « densité de matière » ρ — ou densité du nombre des corpuscules identiques supposés constituer le fluide — par la masse m d'un de ces corpuscules.

Pour passer aux équations relativistes, nous devons faire intervenir deux genres de considérations. D'une part l'impulsion classique $\rho m \nu_i$ ne met en jeu que l'énergie liée à la masse des corpuscules. Or les tensions internes donnent naissance à une énergie potentielle spéciale qui, du point de vue relativiste, possède une inertie et doit donc contribuer à l'impulsion. Si nous considérons un élément du fluide où la vitesse est ν_j , nous savons que la force agissant du fait des tensions sur un élément de surface est $T_j dS = \tau_{kj} d\sigma_k$.

Au bout du temps dt l'élément de surface s'est déplacé de $\nu_j dt$ et la force $T_j dS$ a ainsi exécuté un travail

$$T_j \nu_j dS dt = \tau_{kj} \nu_j d\sigma_k dt.$$

Cette expression montre que l'unité d'aire normale à $d\sigma_k$ est traversée dans l'unité de temps par un flux d'énergie dû aux tensions internes, égal à $\tau_{kj} \nu_j$.

A ce flux correspond une densité d'impulsion relativiste $\frac{1}{c^2} \tau_{kj} \nu_j$ qui vient s'ajouter dans la transcription relativiste des deux équations classiques, à l'impulsion $\rho m \nu_k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho m) + \partial_j \left(\rho m \nu_j + \frac{1}{c^2} \tau_{jk} \nu_k \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho m \nu_i + \frac{1}{c^2} \tau_{ik} \nu_k \right) + \partial_j \left(\rho m \nu_i \nu_j + \frac{1}{c^2} \tau_{ik} \nu_j \nu_k + \tau_{ij} \right) &= F_i. \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que les équations de l'hydrodynamique classique, qui ne sont pas invariantes par une transformation de Lorentz, ne sont valables en toute rigueur que dans un référentiel particulier. Si nous considérons un point P du fluide à un instant t et le référentiel galiléen Σ_0 attaché à ce point (*référentiel propre local*) les équations ci-dessus décriront le mouvement du fluide au voisinage immédiat du point P, et seulement pendant un intervalle de temps infinitésimal dt . Les équations ci-dessus sont donc rigoureuses en tant que projections sur les axes propres en P d'équations relativistes covariantes. Dans le système propre, la vitesse ν_i est nulle (alors que ses dérivées par rapport aux coordonnées et au temps ne le sont pas). Il en résulte en particulier que les termes $\partial_j (\rho m \nu_i \nu_j)$ et $\partial_j (\tau_{ik} \nu_k \nu_j)$ sont nuls. On a ainsi relativement aux axes propres :

$$(B-1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho m) + \partial_j \left(\rho m \nu_j + \frac{1}{c^2} \tau_{jk} \nu_k \right) = 0$$

$$(B-2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho m \nu_i + \frac{1}{c^2} \tau_{ik} \nu_k \right) + \partial_j \tau_{ij} = F_i.$$

Introduisons les grandeurs tensorielles qui interviendront dans l'équation relativiste et étudions leurs projections et celles de leurs dérivées sur les axes propres. La vitesse unitaire u_μ a pour expression générale :

$$u_l = \alpha v_l \quad u_4 = \alpha ic \quad \left[\alpha = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Dans le système propre, ses projections sont $0, 0, 0, ic$. Les dérivées donnent :

$$\partial_k \alpha = \frac{v \partial_k v}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\partial_4 \alpha = \frac{v \partial_4 v}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

On fait alors $v = 0$

d'où $(\alpha)^0 = 1 \quad (\partial_k \alpha)^0 = (\partial_4 \alpha)^0 = 0$

$$(\partial_j u_k)^0 = \partial_j v_k \quad (\partial_4 u_k)^0 = \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} v_k \quad (\partial_j u_4)^0 = (\partial_4 u_4)^0 = 0.$$

La densité ρ , ou quantité de matière par unité de volume, et la masse m , ne sont pas des invariants relativistes. Dans le système propre, elles prennent les valeurs ρ_0 et m_0 caractéristiques de la matière au repos. On peut définir deux invariants ayant les valeurs ρ_0 et m_0 dans tous les référentiels. m_0 est la *masse propre* et ρ — où nous supprimons l'indice 0 — la *densité invariante de matière*. La conservation de la matière se traduit par la relation covariante

$$\partial_\mu (\rho u_\mu) = 0$$

soit (voir Appendice A) : $\dot{\rho} = 0$.

Le nombre de molécules par unité de volume propre reste constant le long d'une ligne de courant.

On définit un vecteur d'univers *densité de force relativiste extérieure* f_μ qui, dans le système propre, a pour composantes

$$f_k^0 = F_k \quad f_4^0 = 0.$$

On a donc $f_\mu u_\mu = 0$.

De même on définit un tenseur d'univers symétrique des *tensions internes* $\theta_{\mu\nu}$ qui, dans le système propre, a pour composantes :

$$\theta_{ij}^0 = \tau_{ij} \quad \theta_{i4}^0 = \theta_{44}^0 = 0.$$

On a ainsi : $\theta_{\mu\nu} u_\nu = \theta_{\mu\nu} u_\mu = 0$.

On a dans le système propre :

$$\begin{aligned} [\partial_\lambda(\theta_{\mu j} u_j)]^0 &= \theta_{\mu j}^0 (\partial_\lambda u_j)^0 = \theta_{\mu j}^0 \partial_\lambda \nu_j \\ [\partial_\lambda(\theta_{\mu 4} u_4)]^0 &= ic(\partial_\lambda \theta_{\mu 4})^0 \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \theta_{\mu j} u_j &= -\theta_{\mu 4} u_4 : \\ ic(\partial_\lambda \theta_{\mu 4})^0 &= -\theta_{\mu j}^0 \partial_\lambda \nu_j \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (\partial_i \theta_{k4})^0 &= \frac{i}{c} \tau_{kj} \partial_i \nu_j & (\partial_i \theta_{44})^0 &= 0 \\ (\partial_4 \theta_{k4})^0 &= \frac{1}{c^2} \tau_{kj} \frac{\partial \nu_j}{\partial t} & (\partial_4 \theta_{44})^0 &= 0. \end{aligned}$$

On pourrait arriver à l'équation tensorielle relativiste en soumettant les équations (1, 2) à une transformation de Lorentz quelconque, et en cherchant à mettre en évidence, dans l'équation transformée, les composantes des quantités tensorielles que nous venons de définir ⁽³⁾. Il est plus simple, comme le fait M. Lichnérowicz ⁽⁴⁴⁾, de considérer d'emblée l'équation tensorielle :

(B-3)

$$\partial_\nu (\rho m_0 u_\mu u_\nu + \theta_{\mu\nu}) = f_\mu$$

et de montrer que ses projections sur les axes propres sont identiques aux équations (1, 2). L'équation (3) étant tensorielle, on est alors assuré qu'une transformation de Lorentz effectuée sur les équations (1, 2) donnera dans n'importe quel référentiel des équations qui seront les projections dans ce référentiel de l'équation covariante.

Les projections de l'équation (3) sur les axes d'espace et de temps donnent :

$$\begin{aligned} \partial_4 (\rho m_0 u_4 u_4 + \theta_{44}) + \partial_j (\rho m_0 u_4 u_j + \theta_{4j}) &= f_4 \\ \partial_4 (\rho m_0 u_i u_4 + \theta_{i4}) + \partial_j (\rho m_0 u_i u_j + \theta_{ij}) &= f_i. \end{aligned}$$

Dans le système propre

$$f_4^0 = 0 \quad [\partial_j (\rho m_0 u_i u_j)]^0 = 0.$$

Appliquons en outre les formules que nous avons établies pour l'expression des dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho m_0 ic) + \partial_j (\rho m_0 \nu_j ic) + \frac{i}{c} \tau_{ji} \partial_j \nu_i &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho m_0 \nu_i) + \frac{1}{c^2} \tau_{ik} \frac{\partial \nu_k}{\partial t} + \partial_j \tau_{ij} &= F_i. \end{aligned}$$

Ce sont bien les équations données plus haut.

L'équation covariante $\partial_\nu (\rho m_0 u_\mu u_\nu + \theta_{\mu\nu}) = f_\mu$ met en évidence le tenseur symétrique

$$t_{\mu\nu} = \rho m_0 u_\mu u_\nu + \theta_{\mu\nu}$$

qu'on appelle *tenseur d'énergie-impulsion*. De façon générale, la structure du tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide détermine fondamentalement les propriétés de ce fluide et permet de classer les divers types de fluides. La forme à laquelle nous sommes parvenus pour le tenseur $t_{\mu\nu}$, caractérise ce que nous appellerons un *fluide classique*. Nous entendrons par là que le tenseur $t_{\mu\nu}$ possède les deux propriétés suivantes :

- 1) Il est *symétrique*, ce qui, nous le verrons, exprime que le fluide ne comporte pas de moment cinétique interne.
- 2) Si on le contracte par u_ν , on obtient, puisque

$$\begin{aligned}\theta_{\mu\nu}u_\nu &= 0 : \\ t_{\mu\nu}u_\nu &= -\rho m_0 c^2 u_\mu.\end{aligned}$$

Autrement dit, la vitesse unitaire est *vecteur propre* pour la matrice $t_{\mu\nu}$. Nous verrons que cette propriété exprime que le vecteur densité d'impulsion du fluide est colinéaire au courant. A la vérité, dans la plupart des cas (les schémas « normaux » de M. Lichnérowicz) on peut déterminer, à partir d'un tenseur $t_{\mu\nu}$, quelconque donné, quatre directions qui soient les directions propres de la matrice $t_{\mu\nu}$, et dont l'une est nécessairement du genre temps ⁽⁴⁵⁾. Si on choisit comme vecteur vitesse unitaire le vecteur normé et convenablement orienté sur ce quatrième axe propre, alors la propriété indiquée sera réalisée *par définition*. Mais les fluides que nous rencontrerons dans la partie hydrodynamique du présent travail auront généralement une vitesse unitaire déterminée par des considérations « cinématiques » indépendantes du tenseur d'énergie impulsion, si bien que la propriété en question ne se trouvera pas réalisée en général.

Notre travail est principalement consacré à l'étude de fluides non-classiques comportant une impulsion non colinéaire à la vitesse et une densité de moment angulaire interne. Mais pour nous guider dans ce domaine, il est indispensable de rappeler les principaux résultats acquis dans l'étude des fluides classiques ⁽⁴⁶⁾. Nous n'aurons besoin de considérer que l'évolution de ces fluides en l'absence de forces extérieures. Le tenseur $t_{\mu\nu}$ est alors conservatif :

$$\boxed{\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0}.$$

Les divers cas que l'on peut rencontrer se distinguent par les particularités du tenseur des tensions relativistes $\theta_{\mu\nu}$. Passons en revue les principaux, en procédant du particulier au général et en nous laissant guider par l'hydrodynamique non relativiste.

Le cas le plus simple est celui où il n'y a pas du tout de tensions internes. Le tenseur $\theta_{\mu\nu}$ est nul intrinsèquement et le tenseur d'énergie-impulsion se réduit à sa partie cinétique $\rho m_0 u_\mu u_\nu$. On dit alors qu'on a un fluide *matière pure*.

§ 2. Fluides parfaits.

Le second cas est la généralisation relativiste du *fluide parfait*, ou fluide sans viscosité. On sait que ce cas est caractérisé en hydrodynamique non relativiste par le fait qu'en un point P, la force de tension a une grandeur indépendante de la direction de la coupe et une direction perpendiculaire à la coupe. Le tenseur non relativiste des tensions est alors :

$$\tau_{ij} = p \delta_{ij}$$

p est la *pression* et suffit à caractériser les forces internes. Si on définit le tenseur relativiste $\theta_{\mu\nu}$ par le fait que dans le système propre on a :

$$\theta_{ij}^0 = \tau_{ij} \quad \theta_{i4}^0 = \theta_{4i}^0 = \theta_{44}^0 = 0,$$

on voit facilement que $\theta_{\mu\nu}$ a la forme :

$$\theta_{\mu\nu} = p \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) \equiv p \eta_{\mu\nu}.$$

Le deuxième terme, dans le système propre, ne donne pas de contribution aux composantes θ_{ij}^0 , θ_{i4}^0 , θ_{4i}^0 , mais il intervient pour annuler la composante θ_{44}^0 .

Le tenseur d'énergie-impulsion $t_{\mu\nu} = \rho m_0 u_\mu u_\nu + p \eta_{\mu\nu}$ peut aussi s'écrire :

(B-4)

$$t_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu + \delta_{\mu\nu} p$$

en posant $\mu_0 = \rho M_0 = \rho m_0 + \frac{p}{c^2}$ et en introduisant la masse propre variable, ou *pseudomasse*

$$M_0 = m_0 + \frac{p}{\rho c^2}$$

qui ne diffère de m_0 que par un terme relativiste.

Cette nouvelle décomposition est plus suggestive que la précédente. Elle adjoint — sous une forme covariante cette fois — à la masse propre des particules, la masse supplémentaire liée à l'énergie des tensions, effaçant, conformément aux idées relativistes, la disjonction absolue entre l'énergie-impulsion cinétique et les tensions. Celles-ci font maintenant apparaître un nouveau tenseur

$$\pi_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} p$$

que nous appellerons *tenseur des pressions* et qui n'est plus dans l'espace propre car il possède dans le système propre une composante de temps $\pi_{44}^0 = p$.

En prenant la divergence de ce tenseur, on définit une densité de force, et en divisant celle-ci par μ_0 on introduit une force de pression rapportée à l'unité de pseudomasse, qui a les dimensions d'un champ de pesanteur. Nous l'appellerons *champ des pressions internes* :

$$K_\mu = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\nu \pi_{\mu\nu}$$

ou

$$K_\mu = -\frac{\partial_\mu p}{\rho m_0 + p/c^2}.$$

La relation fondamentale $\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$ nous donne :

$$(B-5) \quad \begin{aligned} \partial_\nu (\mu_0 u_\mu u_\nu) &= -\partial_\mu p = \mu_0 K_\mu \\ u_\mu \partial_\nu (\mu_0 u_\nu) + \mu_0 u_\nu \partial_\nu u_\mu &= \mu_0 K_\mu. \end{aligned}$$

En contractant par u_μ :

$$-c^2 \partial_\nu (\mu_0 u_\nu) = \mu_0 K_\mu u_\mu \quad \text{car} \quad u_\mu \partial_\nu u_\mu = 0.$$

En remplaçant μ_0 par $\rho m_0 + p/c^2$, il vient :

$$(B-6) \quad (\rho m_0 + p/c^2) \partial_\nu u_\nu + u_\nu \partial_\nu (\rho m_0) + u_\nu \partial_\nu (p/c^2) = -\frac{\mu_0}{c^2} K_\nu u_\nu = -\frac{1}{c^2} \partial_\nu p \cdot u_\nu.$$

Il reste donc :

$$\left(\rho m_0 + \frac{p}{c^2} \right) \partial_\nu u_\nu + u_\nu \partial_\nu (\rho m_0) = 0.$$

C'est l'équation de conservation des fluides parfaits. Elle peut aussi s'écrire (voir Appendice A)

$$\partial_\nu (\rho m_0 u_\nu) \equiv \frac{d}{d\tau} (\rho m_0) = -\frac{1}{c^2} p \partial_\nu u_\nu.$$

Ou encore, comme $\frac{d\rho}{d\tau} = 0$

$$\rho \frac{dm_0}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} p \partial_\nu u_\nu.$$

On voit que la masse propre particulière ne reste pas constante. Le scalaire $\partial_\nu u_\nu$, qui peut être évalué dans le système propre, où il vaut $\partial_j v_j$, représente la divergence de la vitesse, c'est-à-dire la dilatation de la matière. Le travail de cette dilatation contre la pression interne produit une énergie spécifique $-p \partial_\nu u_\nu$, dont la masse $-\frac{1}{c^2} p \partial_\nu u_\nu$ vient s'ajouter à densité de masse propre.

L'équation (5) devient, en tenant compte de (6) :

$$-\frac{\mu_0}{c^2} K_\nu u_\nu u_\mu + \mu_0 u_\nu \partial_\nu u_\mu = \mu_0 K_\mu$$

ou, en posant (Appendice A)

$$(B-7) \quad \begin{aligned} u_\nu \partial_\nu u_\mu &= \frac{d}{d\tau} u_\mu = \dot{u}_\mu \\ \dot{u}_\mu &= \eta_{\mu\nu} K_\nu \end{aligned}$$

et, en remplaçant K_ν par sa valeur :

$$\boxed{(\rho m_0 + p/c^2) \dot{u}_\mu = -\eta_{\mu\nu} \partial_\nu p}$$

équations qui, avec les relations

$$\dot{x}_\mu = u_\mu$$

constituent le *système différentiel aux lignes de courant* pour le fluide parfait.

Le cas le plus intéressant est celui où, comme pour les fluides matériels, le fluide est régi par une *équation d'état* qui fait dépendre la densité — ici, la densité de masse propre — uniquement de la pression :

$$\rho m_0 = \Phi(p).$$

Dans ce cas, on peut faire apparaître le champ de forces comme le gradient d'un potentiel scalaire.

On pose :

$$K_\mu \equiv -\frac{\partial_\mu p}{\rho m_0 + p/c^2} = -c^2 \partial_\mu \text{Log } F$$

le potentiel scalaire étant $\text{Log } F$ et le facteur c^2 apparaissant pour des raisons d'homogénéité. Comme ρm_0 , et par conséquent $\rho m_0 + \frac{p}{c^2}$, ne dépendent des coordonnées que par l'intermédiaire de p , on peut intégrer et on obtient :

$$\boxed{\text{Log } F = \frac{1}{c^2} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho m_0 + p/c^2}}$$

$\text{Log } F$ est ainsi une quantité relativiste en $\frac{1}{c^2}$ et F est un nombre pur très voisin de l'unité et valant sensiblement

$$F \neq 1 + \frac{1}{c^2} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho m_0 + p/c^2}.$$

M. Lichnérowicz a démontré ⁽⁴⁶⁾ — et ceci dans le cas beaucoup plus général des « fluides holonômes » que nous définirons tout à l'heure — que la fonction F jouit de la propriété suivante : les lignes de courant du fluide réalisent l'extrémum de l'intégrale $\int F ds$ entre deux extrémités fixes. Cette analogie avec l'optique de Fermat-Malus, le conduit à donner à F le nom d'*indice* du fluide.

On introduit alors le vecteur

$$Fu_\mu = C_\mu$$

colinéaire à la vitesse et n'en différant en grandeur que par un terme en $\frac{1}{c^2}$. Ce vecteur que M. Lichnérowicz appelle le courant, nous préférons

l'appeler *vitesse pondérée*, réservant le nom de courant au vecteur $j_\mu = \rho u_\mu$ qui n'a pas les mêmes dimensions, et qui est essentiellement conservatif (tandis que C_μ n'est conservatif que dans un cas particulier). Le vecteur C_μ jouit de propriétés analytiques importantes. En particulier, sa circulation $\int C_\mu dx_\mu$ le long d'un contour fermé ne varie pas quand on déforme le contour de manière qu'il reste sur un même tube de courant ⁽⁴⁶⁾, et ceci reste vrai dans le cas général des fluides holonômes.

Le rotationnel relativiste du vecteur vitesse pondérée

$$\Omega_{[\mu\nu]} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$$

est le *tenseur tourbillon*. Si on explicite C_μ :

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu\nu} &= \partial_\mu (Fu_\nu) - \partial_\nu (Fu_\mu) = F(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu) + u_\nu \partial_\mu F - u_\mu \partial_\nu F \\ &= F(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu) - \frac{F}{c^2} (u_\nu K_\mu - u_\mu K_\nu).\end{aligned}$$

Le tourbillon ne diffère d'un tenseur colinéaire (et presque égal) au tourbillon ordinaire des vitesses unitaires, que par un terme relativiste, produit extérieur de la vitesse unitaire et du champ des forces de pression. Ceci étant, il résulte des équations du mouvement que le tenseur tourbillon est orthogonal au courant, et a par conséquent toutes ses composantes dans l'espace propre. En effet :

$$\Omega_{\mu\nu} u_\nu = F(u_\nu \partial_\mu u_\nu - u_\nu \partial_\nu u_\mu) - \frac{F}{c^2} (-c^2 K_\mu - u_\mu K_\nu u_\nu).$$

Dans la première parenthèse, le premier terme est nul puisque $u_\nu u_\nu = -c^2$.

Le second est égal à $-K_{,\eta_{\mu\nu}}$ d'après (7), et annule ainsi la seconde parenthèse.

Si on se place dans l'espace propre, on peut former un vecteur d'espace propre défini comme étant le dual d'espace du tenseur tourbillon, soit :

$$\theta_k^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{ij}^0.$$

Ce vecteur appelé *vecteur tourbillon* s'exprime de façon covariante par

$$\theta_\mu = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\alpha\beta\mu} u_\nu \Omega_{\alpha\beta}$$

avec $\theta_\mu u_\mu = 0$, comme il est aisé de le vérifier (chap. III).

Si on explicite $\Omega_{\alpha\beta}$ on voit que :

$$\theta_\mu = \frac{i}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\mu} F u_\nu \partial_\alpha u_\beta + \frac{i}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\mu} u_\nu u_\beta \partial_\alpha F$$

$$\theta_\mu = \frac{i}{c} F \varepsilon_{\alpha\beta\mu} u_\nu \partial_\alpha u_\beta$$

le second terme s'annulant par antisymétrie.

On voit que le vecteur tourbillon

$$\theta_\mu = \frac{i}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\mu} u_\nu \partial_\alpha C_\beta$$

est colinéaire au vecteur analogue formé avec le rotationnel des vitesses unitaires $\frac{i}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\mu} u_\nu \partial_\alpha u_\beta$, mais ce dernier ne correspond pas à un tenseur antisymétrique d'espace propre analogue à $\Omega_{\mu\nu}$. Il faut se garder de confondre le tenseur $\Omega_{\mu\nu}$ et le vecteur θ_μ avec le tenseur moment angulaire interne $S_{\mu\nu}$ et le spin σ_μ que nous rencontrerons tout au long du présent travail. En effet ces dernières quantités se rapportent à une rotation *propre* caractéristique des fluides non-classiques et indépendante de la rotation tourbillonnaire ou *orbitale* décrite par $\Omega_{\mu\nu}$ et θ_μ . En outre $S_{\mu\nu}$ et σ_μ sont des quantités *cinétiques* faisant intervenir la masse, tandis que $\Omega_{\mu\nu}$ et θ_μ sont des quantités *cinématiques* ne mettant en jeu que la vitesse (pondérée par le potentiel des pressions internes).

Un cas particulier de fluide parfait achève de fixer le rôle du vecteur vitesse pondérée C_μ . L'hydrodynamique non relativiste étudie, comme cas limite, le fluide parfait *incompressible*, caractérisé par l'équation d'état $\rho = \text{const.}$

Quelque grande que soit la pression, la densité du fluide reste inva-

riable. Comme on a d'autre part l'équation de conservation $\partial_\mu(\rho u_\mu) = 0$ ce cas se traduirait par l'équation relativiste

$$\partial_\mu u_\mu = 0$$

Mais un fluide rigoureusement incompressible transmettrait les déformations à une vitesse infinie, ce qui est contraire aux principes de la relativité. En fait on montre ⁽⁴⁶⁾ que la vitesse d'un front d'onde dans un fluide parfait admettant une équation d'état est : $v = \frac{1}{\sqrt{d(\rho m_0)/dp}}$.

Cette vitesse étant nécessairement inférieure à c , on appelle en relativité *fluide incompressible*, un fluide limite où les fronts d'onde se propagent avec la vitesse c . On a alors pour le fluide parfait incompressible :

$$\frac{d(\rho m_0)}{dp} = \frac{1}{c^2}$$

ce qui s'intègre immédiatement et donne l'équation d'état :

$$\rho m_0 - \frac{p}{c^2} = \text{const.}$$

Si nous tenons compte de l'équation de conservation :

$$\left(\rho m_0 + \frac{p}{c^2}\right) \partial_\alpha u_\alpha + u_\alpha \partial_\alpha (\rho m_0) = 0$$

l'équation d'état fournit :

$$u_\alpha \partial_\alpha \left(\rho m_0 - \frac{p}{c^2}\right) = 0$$

soit

$$u_\alpha \partial_\alpha (\rho m_0) = u_\alpha \partial_\alpha \left(\frac{p}{c^2}\right)$$

et

$$\left(\rho m_0 + \frac{p}{c^2}\right) \partial_\alpha u_\alpha + u_\alpha \partial_\alpha \left(\frac{p}{c^2}\right) = 0$$

d'où

$$\partial_\alpha u_\alpha = -u_\alpha \frac{\partial_\alpha p/c^2}{\rho m_0 + p/c^2}.$$

C'est l'équation d'incompressibilité relativiste qui remplace l'équation

$$\partial_\alpha u_\alpha = 0$$

impossible à réaliser. Mais le second membre est simplement $u_\alpha K_\alpha/c^2$ et si on exprime K_α en fonction de l'indice F , il vient :

$$\partial_\alpha u_\alpha = -u_\alpha \partial_\alpha \text{Log } F$$

ou

$$F\partial_\alpha u_\alpha = -u_\alpha \partial_\alpha F$$

soit

$$\partial_\alpha (Fu_\alpha) = 0.$$

On voit que l'incompressibilité relativiste s'exprime par

$$\partial_\alpha C_\alpha = 0.$$

Plus généralement, la divergence du vecteur vitesse pondérée C_α caractérise le degré de compressibilité du fluide. On peut donner au scalaire $\partial_\alpha C_\alpha$ le nom de *compressibilité relativiste*.

La notion de pression introduite par les fluides parfaits et la décomposition (4) du tenseur d'énergie impulsion peuvent se généraliser à un fluide classique quelconque. Partons de la décomposition

$$t_{\mu\nu} = \rho m_0 u_\mu u_\nu + \theta_{\mu\nu} \quad \theta_{\mu\nu} u_\nu = \theta_{\mu\nu} u_\mu = 0$$

caractérisant les fluides classiques :

Si le fluide est parfait

$$\theta_{\mu\nu} = p \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right)$$

et le scalaire obtenu en le contractant est

$$\theta_{\mu\mu} = p \left(4 - \frac{c^2}{c^2} \right) = 3p.$$

Pour un fluide quelconque, on peut toujours former le même scalaire et poser

$$3p = \theta_{\mu\mu}.$$

Le tenseur des tensions se décomposera alors en un terme

$$p \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) \equiv p \eta_{\mu\nu}$$

et un terme $\Lambda_{\mu\nu}$ qui disparaît dans la contraction, si bien que

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\mu} &= 0 \\ \theta_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} p + \Lambda_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Le premier terme étant, comme $\theta_{\mu\nu}$, situé dans l'espace propre et symétrique, il en sera de même de $\Lambda_{\mu\nu}$

$$\Lambda_{\mu\nu} u_\nu = \Lambda_{\mu\nu} u_\mu = 0 \quad \text{et} \quad \Lambda_{\mu\nu} = \Lambda_{\nu\mu}.$$

Nous allons supposer dans ce qui suit que la pression *obtenue en contractant le tenseur des tensions* a un sens physique, et, comme telle,

intervient dans une équation d'état suivant laquelle elle détermine à elle seule la densité :

$$\rho m_0 = \Phi(p).$$

Dès lors il est possible de définir un indice F du fluide comme dans le cas des fluides parfaits par l'expression :

$$\text{Log } F = \frac{1}{c^2} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho m_0 + p/c^2}.$$

De même on définira encore une vitesse pondérée

$$C_\mu = F u_\mu$$

et on prendra la divergence $\partial_\mu C_\mu$ comme mesure de la compressibilité relativiste.

§ 3. Fluides visqueux.

L'étape suivante appelle la généralisation relativiste de l'hydrodynamique classique des fluides visqueux. On sait que le tenseur des tensions visqueuses s'écrit :

$$\tau_{ij} = \pi \delta_{ij} + \frac{1}{2} \eta (\partial_i \nu_j + \partial_j \nu_i)$$

π étant la pression non-relativiste et η le coefficient de viscosité. M. Lichnérowicz a montré ⁽⁴⁶⁾ que, pour arriver à une formulation relativiste correcte, il faut introduire un indice, et une métrique associée à cet indice. Nous supposons que le problème est résolu et que nous sommes en possession d'un tenseur relativiste des tensions visqueuses $\theta_{\mu\nu}$. On peut alors déterminer une *pression relativiste* (qu'il ne faut pas confondre avec π) : $p = \frac{1}{3} \theta_{\mu\mu}$ d'où un indice F et une vitesse pondérée

C_μ . Nous allons définir en outre une métrique riemannienne que nous allons décrire au moyen des coordonnées usuelles dont nous nous sommes servi jusqu'ici et qui se rapportent aux référentiels galiléens de l'univers euclidien de la relativité restreinte. Nous choisirons un tenseur fondamental

$$g_{\mu\nu} = F^2 \delta_{\mu\nu}$$

d'où

$$g^{\mu\nu} = F^{-2} \delta^{\mu\nu}$$

et nous supposons que les tenseurs que nous avons étudiés jusqu'à présent vont engendrer dans la nouvelle métrique des tenseurs ayant mêmes composantes *covariantes*. Ainsi la vitesse pondérée C_α donnera dans la métrique $g_{\mu\nu}$ un vecteur dont les composantes covariantes seront

C_α et les composantes contrevariantes seront $C^\alpha = g^{\alpha\beta} C_\beta = F^{-2} \delta^{\alpha\beta} C_\beta$.

Il en résulte que

$$C_\alpha C^\alpha = C_\alpha C_\beta F^{-2} \delta^{\alpha\beta} = F^2 u_\alpha u_\beta F^{-2} \delta^{\alpha\beta} = -c^2.$$

Dans la métrique $g_{\mu\nu}$, le vecteur vitesse pondérée jouera donc le rôle de vitesse *unitaire*. Les dérivées ordinaires devront être remplacées par des dérivées covariantes. La connexion sera donnée par les symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2} F^{-2} \delta^{\rho\lambda} (\delta_{\beta\lambda} \partial_\alpha F^2 + \delta_{\alpha\lambda} \partial_\beta F^2 - \delta_{\alpha\beta} \partial_\lambda F^2) \\ &= F^{-1} (\delta_{\beta\lambda}^0 \partial_\alpha F + \delta_{\alpha\lambda}^0 \partial_\beta F - \delta_{\alpha\beta} \delta^{\rho\lambda} \partial_\lambda F). \end{aligned}$$

Si on introduit le champ des pressions internes

$$K_\alpha = -c^2 \partial_\alpha \text{Log } F$$

il vient :

$$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{c^2} (\delta_\beta^0 K_\alpha + \delta_\alpha^0 K_\beta - \delta_{\alpha\beta} \delta^{\rho\lambda} K_\lambda)$$

soit, pour la dérivée covariante d'un vecteur V_β

$$\nabla_\alpha V_\beta = \partial_\alpha V_\beta + \frac{1}{c^2} (K_\alpha V_\beta + K_\beta V_\alpha - \delta_{\alpha\beta} \delta^{\rho\lambda} K_\lambda V_\rho).$$

Ceci établi, nous considérerons que le tenseur des tensions non relativistes correspond au tenseur relativiste rapporté aux axes d'espace du système propre *et à la métrique riemannienne associée*, c'est-à-dire que nous y remplacerons v_j par C_j^0 , les dérivées ordinaires par les dérivées covariantes ∇_α et le symbole δ_{ij} qui est le tenseur fondamental de la métrique euclidienne, par le tenseur g_{ij}^0 . On aura :

$$\tau_{ij} = \theta_{ij}^0 = \pi F^2 \delta_{ij} + \frac{1}{2} \eta (\nabla_i C_j + \nabla_j C_i)^0.$$

A quoi nous adjoindrons : $\theta_{i4}^0 = \theta_{4i}^0 = \theta_{44}^0 = 0$.

Passons à la formulation covariante. On voit immédiatement que le premier terme est

$$\pi \left(g_{\mu\nu} + \frac{C_\mu C_\nu}{c^2} \right) = \pi F^2 \eta_{\mu\nu}.$$

Pour le second terme, M. Lichnérowicz donne l'expression $\eta \Upsilon_{\mu\nu}$ avec :

$$2\Upsilon_{\mu\nu} = \nabla_\mu C_\nu + \nabla_\nu C_\mu + \frac{C_\lambda}{c^2} (\nabla_\lambda C_\mu \cdot C_\nu + \nabla_\lambda C_\nu \cdot C_\mu).$$

On a en effet, en projetant sur le système propre :

$$2\gamma_{ij}^0 = (\nabla_i C_j + \nabla_j C_i)^0$$

ce qui est bien le tenseur d'espace ci-dessus. D'autre part

$$2\gamma_{i4}^0 = (\nabla_i C_4)^0 + (\nabla_4 C_i)^0 + \frac{(C^4 C_4)^0}{c^2} (\nabla_4 C_i)^0.$$

Or, les relations $C^\mu C_\mu = -c^2$ et $C^\mu \nabla_\lambda C_\mu = 0$ donnent dans le système propre : $(C^4 C_4)^0 = -c^2$ d'où $2\gamma_{i4}^0 = (\nabla_i C_4)^0$ et $(C^4 \nabla_\lambda C_4)^0 = 0$ soit $(\nabla_\lambda C_4)^0 = 0$ d'où : $2\gamma_{i4}^0 = 0$.

On voit de même que $\gamma_{44}^0 = 0$.

Nous pouvons revenir entièrement au symbolisme euclidien ordinaire, en conservant simplement le symbole ∇_α représentant par définition l'opération :

$$\nabla_\alpha V_\beta = \partial_\alpha V_\beta + \frac{1}{c^2} (K_\alpha V_\beta + K_\beta V_\alpha - \delta_{\alpha\beta} K_\lambda V_\lambda)$$

Ceci étant, le tenseur

$$2\gamma_{\mu\nu} = \nabla_\mu C_\nu + \nabla_\nu C_\mu + \frac{u_\mu}{c^2} (u_\nu \nabla_\lambda C_\nu + u_\nu \nabla_\lambda C_\mu)$$

est dans l'espace propre : $\gamma_{\mu\nu} u_\nu = 0$, et on a pour expression relativiste du tenseur des tensions visqueuses :

$$\theta_{\mu\nu} = \pi F^2 \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) + \eta \gamma_{\mu\nu}$$

Si on contracte $\gamma_{\mu\nu}$, on obtient :

$$\gamma_{\mu\mu} = \nabla_\mu C_\mu = \partial_\mu C_\mu - \frac{2}{c^2} K_\mu C_\mu \equiv \kappa.$$

Ce scalaire, que nous désignerons par κ , ne diffère de la compressibilité relativiste $\partial_\mu C_\mu$ que par le terme relativiste $-\frac{2}{c^2} K_\mu C_\mu = 2u_\mu \partial_\mu F$.

Ceci étant, nous pouvons finalement exprimer la pression relativiste p : $3p = \theta_{\mu\mu} = 3\pi F^2 + \eta\kappa$.

D'où :

$$\pi F^2 = p - \frac{1}{3} \eta \kappa$$

Et le tenseur d'énergie-impulsion s'écrit :

$$t_{\mu\nu} = \left(\rho m_0 + \frac{p - \eta\kappa/3}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + \delta_{\mu\nu} (p - \eta\kappa/3) + \eta \gamma_{\mu\nu}$$

Expression qui généralise la formule (4) des fluides parfaits en introduisant la densité de pseudomasse

$$\mu_0 = \rho m_0 + \frac{p - \eta\kappa/3}{c^2}$$

et la pression généralisée

$$\pi F^2 = p - \eta\kappa/3.$$

Pour établir les équations du mouvement, il faut d'abord exprimer la divergence de $\gamma_{\mu\nu}$. On peut d'abord transformer ce tenseur de façon à faire apparaître le tenseur tourbillon $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$ qui, on le sait, est identique dans une métrique de Riemann au tenseur $\nabla_\mu C_\nu - \nabla_\nu C_\mu$.

Si on tient compte d'autre part de la relation $C_\lambda \nabla_\mu C_\lambda = 0$ on obtient facilement :

$$2\gamma_{\mu\nu} = 2\nabla_\nu C_\mu + \Omega_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2 F^2} C_\lambda (\Omega_{\lambda\mu} C_\nu + \Omega_{\lambda\nu} C_\mu)$$

On pose alors

$$2\Theta_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} + \frac{u_\lambda}{c^2} (\Omega_{\lambda\mu} u_\nu + \Omega_{\lambda\nu} u_\mu)$$

Précisons que le tenseur $\Omega_{\mu\nu}$ n'est plus orthogonal au courant, comme nous le verrons tout à l'heure. Le tenseur $\Theta_{\mu\nu}$ qui dérive du tourbillon, ne se réduit à celui-ci que dans le cas des fluides parfaits où $\Omega_{\mu\lambda} u_\lambda = 0$.

On a finalement, en explicitant le symbole ∇_μ

$$\gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu + \frac{1}{c^2} (K_\mu C_\nu + K_\nu C_\mu - \delta_{\mu\nu} K_\lambda C_\lambda) + \Theta_{\mu\nu}$$

Si nous dérivons, il vient :

$$\partial_\nu \gamma_{\mu\nu} = \partial_\nu \Theta_{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu C_\nu + \frac{1}{c^2} [K_\nu \partial_\nu C_\mu + C_\nu \partial_\nu K_\mu + C_\mu \partial_\nu K_\nu + K_\mu \partial_\nu C_\nu - \partial_\mu (K_\lambda C_\lambda)]$$

Transformons le crochet en utilisant de nouveau le tourbillon, sous la forme $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$ et en remarquant que $\partial_\nu K_\mu = \partial_\mu K_\nu$ puisque K_μ est un gradient.

$$\text{On a : } \frac{1}{c^2} [K_\nu \Omega_{\nu\mu} + K_\nu \partial_\mu C_\nu + C_\nu \partial_\mu K_\nu + C_\mu \partial_\nu K_\nu + K_\mu \partial_\nu C_\nu - \partial_\mu (K_\lambda C_\lambda)].$$

Le deuxième et le troisième termes donnent $\partial_\mu(K_\nu C_\nu)$ qui s'annule avec le dernier. On a ainsi :

$$\partial_\nu \gamma_{\mu\nu} = \partial_\nu \Theta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu C_\nu + \frac{1}{c^2} [K_\nu \Omega_{\mu\nu} + C_\mu \partial_\nu K_\nu + K_\mu \partial_\nu C_\nu]$$

ce qui donne, en remplaçant K_ν par $-c^2 \partial_\nu \text{Log F}$

$$\partial_\nu \gamma_{\mu\nu} = \partial_\nu \Theta_{\mu\nu} - \Omega_{\mu\nu} \partial_\nu \text{Log F} - C_\mu \square \text{Log F} + \partial_\nu C_\nu \partial_\mu \text{Log F} \left(\frac{\partial_\lambda C_\lambda}{F} \right)$$

Il est alors facile d'écrire les équations du mouvement en l'absence de forces extérieures : $\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$

soit :

$$(B-8) \quad u_\mu \partial_\nu (\mu_0 u_\nu) + \mu_0 u_\nu \partial_\nu u_\mu + \partial_\mu (F^2 \pi) + \eta \partial_\nu \gamma_{\mu\nu} = 0.$$

En contractant par u_μ on a l'équation de conservation :

$$\dot{\mu}_0 = \frac{1}{c^2} u_\lambda [\partial_\lambda (F^2 \pi) + \eta \partial_\nu \gamma_{\lambda\nu}]$$

ce qui, reporté dans l'équation (8) fournit :

$$\frac{u_\mu}{c^2} u_\lambda [\partial_\lambda (F^2 \pi) + \eta \partial_\nu \gamma_{\lambda\nu}] + \mu_0 \dot{u}_\mu + \partial_\mu (F^2 \pi) + \eta \partial_\nu \gamma_{\mu\nu} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\mu_0 \dot{u}_\mu = - \left(\delta_{\mu\lambda} + \frac{u_\mu u_\lambda}{c^2} \right) [\partial_\lambda (F^2 \pi) + \eta \partial_\nu \gamma_{\lambda\nu}]$$

Soit, en explicitant μ_0 , $F^2 \pi$, et $\partial_\nu \gamma_{\lambda\nu}$, et en remarquant que, dans cette dernière expression, le terme colinéaire au courant $C_\mu \square \text{Log F}$ disparaît quand on le multiplie par le projecteur $\delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2}$.

L'équation de conservation

$$\dot{\mu}_0 = \frac{1}{c^2} \left[u_\lambda \left(p - \frac{\eta \kappa}{3} \right) + \eta \left\{ u_\lambda \partial_\nu \Theta_{\lambda\nu} - u_\lambda \Omega_{\lambda\nu} \partial_\nu \text{Log F} + c^2 F \square \text{Log F} + F \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial_\alpha C_\alpha}{F} \right) \right\} \right]$$

et les équations aux lignes de courant :

$$\left(\rho m_0 + \frac{p - \eta \kappa / 3}{c^2} \right) \dot{u}_\mu = - \eta_{\mu\lambda} \left\{ \partial_\lambda \left(p - \frac{\eta \kappa}{3} \right) + \eta \left[F \partial_\lambda \left(\frac{\partial_\alpha C_\alpha}{F} \right) + \Omega_{\alpha\lambda} \partial_\nu \text{Log F} + \partial_\alpha \Theta_{\alpha\lambda} \right] \right\}$$

Utilisons cette équation pour étudier le tenseur tourbillon. On a, comme dans le cas des fluides parfaits, pour la projection de $\Omega_{\mu\nu}$ sur le courant :

$$\Omega_{\mu\nu} u_\nu = F (u_\nu \partial_\mu u_\nu - u_\nu \partial_\nu u_\mu) - \frac{F}{c^2} (-c^2 K_\mu - u_\mu K_\nu u_\nu)$$

$$\Omega_{\mu\nu} u_\nu = -F (\dot{u}_\mu - \eta_{\mu\nu} K_\nu)$$

ou, en multipliant par μ_0 et en remplaçant K, en fonction de $\partial_\nu p = -\left(\rho m_0 + \frac{p}{c^2}\right) K_\nu$:

$$\mu_0 \Omega_{\mu\nu} u_\nu = -F \left[\mu_0 \dot{u}_\mu + \frac{\mu_0}{\rho m_0 + p/c^2} \eta_{\mu\nu} \partial_\nu p \right]$$

soit, en tirant $\mu_0 \dot{u}_\mu$ de l'équation du mouvement:

$$\mu_0 \Omega_{\mu\nu} u_\nu = F \eta_{\mu\nu} \left[\partial_\nu (F^2 \pi) + \eta_{\lambda\gamma} \gamma_{\nu\lambda} - \frac{\mu_0}{\rho m_0 + p/c^2} \partial_\nu p \right]$$

Ou en explicitant μ_0 et $F^2 \pi$

$$\mu_0 \Omega_{\mu\nu} u_\nu = \eta F \eta_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{3} \partial_\nu x + \partial_\lambda \gamma_{\nu\lambda} + \frac{x}{3c^2} \frac{\partial_\nu p}{\rho m_0 + p/c^2} \right)$$

En réintroduisant K, dans le dernier terme, la parenthèse donne:

$$-\frac{1}{3} \partial_\nu x - \frac{K_\nu}{3c^2} x + \partial_\lambda \gamma_{\nu\lambda}$$

ce qu'on transforme aisément en: $-\frac{1}{3} F \partial_\nu \left(\frac{x}{F} \right) + \partial_\lambda \gamma_{\nu\lambda}$

$$\boxed{\mu_0 \Omega_{\mu\nu} u_\nu = \eta F \eta_{\mu\nu} \left[\partial_\lambda \gamma_{\nu\lambda} - \frac{1}{3} F \partial_\nu \left(\frac{x}{F} \right) \right]}$$

Ainsi le tenseur $\Omega_{\mu\nu}$ n'est plus orthogonal au courant. On peut encore l'exprimer, comme nous le ferons dans le cas des moments angulaires internes, au moyen du vecteur $\theta_\mu = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu \Omega_{\alpha\beta}$ mais nous devons introduire en outre (voir chap. III) un second vecteur $\lambda_\mu = \frac{1}{c} \Omega_{\mu\nu} u_\nu$ orthogonal au courant par raison d'antisymétrie et dont l'expression est:

$$\boxed{\lambda_\mu = \frac{1}{\mu_0 c} \eta F \eta_{\mu\nu} \left[\partial_\lambda \gamma_{\nu\lambda} - \frac{1}{3} F \partial_\nu \left(\frac{x}{F} \right) \right]}$$

et nous aurons:

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{1}{c} [i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \theta_\beta + (u_\mu \lambda_\nu - u_\nu \lambda_\mu)]$$

Dans le cas des mouvements irrotationnels, les équations se simplifient, les tenseurs $\Omega_{\mu\nu}$ et $\Theta_{\mu\nu}$ disparaissent et il vient pour l'équation de conservation:

$$\dot{\mu}_0 = \frac{1}{c^2} u_\lambda \left\{ \partial_\lambda (F^2 \pi) + \eta F \left[c^2 \square \text{Log } F + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial_\alpha C_\alpha}{F} \right) \right] \right\}$$

et pour l'équation aux lignes de courant :

$$\mu_0 \dot{u}_\mu = -\eta_{\mu\lambda} \left[\partial_\lambda (F^2 \pi) + \eta F \partial_\lambda \left(\frac{\partial_\alpha C_\alpha}{F} \right) \right]$$

A ce propos, remarquons que la condition d'irrotationnalité peut s'écrire : $\nabla_\mu C_\nu - \nabla_\nu C_\mu = 0$.

Et qu'on peut, en la considérant comme rapportée à la métrique associée $g_{\mu\nu}$, la contracter par C^μ :

$$C^\mu \nabla_\mu C_\nu - C^\mu \nabla_\nu C_\mu = 0.$$

Le second terme est nul puisque $C^\mu C_\mu = -c^2$ et il reste la condition $C^\mu \nabla_\mu C_\nu = 0$ où, puisque C_μ est la vitesse unitaire dans la métrique $g_{\mu\nu}$, on reconnaît l'équation d'une géodésique. Ainsi les lignes de courant d'un mouvement irrotationnel sont des géodésiques de la métrique riemannienne associée, ce qui achève de montrer l'importance de l'introduction de cette métrique.

Si le fluide visqueux est incompressible, c'est le terme $F \partial_\lambda \left(\frac{\partial_\alpha C_\alpha}{F} \right)$ qui disparaît dans les équations, et si le fluide incompressible est astreint à un mouvement irrotationnel, c'est toute la parenthèse en facteur de η qui disparaît, à l'exception du terme en $\square \text{Log } F$, dans l'équation de conservation :

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_0 &= \frac{1}{c^2} u_\lambda \partial_\lambda (F^2 \pi) + \eta F \square \text{Log } F \\ \mu_0 \dot{u}_\mu &= -\eta_{\mu\lambda} \partial_\lambda (F^2 \pi). \end{aligned}$$

La deuxième équation est analogue à celle d'un fluide parfait. Néanmoins, la viscosité intervient encore dans l'expression de $F^2 \pi = p - \frac{\eta \kappa}{3}$ et $\mu_0 = \rho m_0 + \frac{p - \eta \kappa / 3}{c^2}$, κ se réduisant à $-\frac{2}{c^2} K_\mu C_\mu = 2\dot{F}$ puisque le terme de compressibilité est nul. Le terme complémentaire est en $\frac{1}{c^2}$ dans la pression et en $\frac{1}{c^4}$ dans la pseudomasse.

On peut donc dire qu'un fluide visqueux incompressible admet un mouvement irrotationnel ayant mêmes lignes de courant qu'un fluide parfait soumis à une pression

$$F^2 \pi = p - \frac{2}{3} \eta \dot{F}.$$

On doit remarquer cependant que l'indice F a été défini à partir, non de la pression $F^2 \pi$, mais de la pression p . Quoique les différences soient très petites, le résultat pris en toute rigueur, est donc moins

simple que celui donné par M. Lichnérowicz — éventualité que celui-ci fait du reste prévoir dans une note —. Cela tient au choix déterminé que nous avons fait d'une pression égale au tenseur des tensions contracté

§ 4. Fluides holonômes.

On peut généraliser d'une autre manière l'hydrodynamique des fluides parfaits. On peut en général décomposer d'une infinité de façons le tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide quelconque en un terme cinétique faisant intervenir une densité de pseudomasse, et en un tenseur des pressions internes non forcément contenu dans l'espace propre :

$$t_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu + \pi_{\mu\nu}.$$

Pour chacune de ces décompositions, on peut, en formant la divergence du tenseur des pressions et en la rapportant à l'unité de pseudomasse, définir un champ de forces internes

$$K_\mu = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\nu \pi_{\mu\nu}.$$

Supposons qu'on puisse trouver une décomposition particulière telle que K_μ soit le gradient d'une fonction scalaire. Alors on dit qu'on a affaire à un *fluide holonome*. On pourra introduire un indice F en posant :

$$K_\mu = -c^2 \partial_\mu \text{Log } F$$

Ici la pression p , qu'il est toujours possible de définir, ne joue plus le même rôle simple dans que les deux cas précédents. Elle ne suffit plus pour déterminer K_μ et F qui dépendent de l'ensemble des actions internes.

On peut, comme nous l'avons fait dans les deux autres cas, écrire l'équation

$$\partial_\nu t_{\mu\nu} = u_\mu \partial_\nu (\mu_0 u_\nu) + \mu_0 u_\nu \partial_\nu u_\mu + \partial_\nu \pi_{\mu\nu} = 0$$

soit

$$\dot{\mu}_0 u_\mu + \mu_0 \dot{u}_\mu = \mu_0 K_\mu = -\mu_0 c^2 \partial_\mu \text{Log } F.$$

D'où on tire une équation de conservation :

$$\boxed{\dot{\mu}_0 = \mu_0 u_\mu \partial_\mu \text{Log } F}$$

et une équation aux lignes de courant :

$$\boxed{\dot{u}_\mu = -c^2 \eta_{\mu\nu} \partial_\nu \text{Log } F}.$$

L'équation de conservation peut s'écrire

$$\partial_\nu u_\nu + u_\nu \partial_\nu \text{Log } \mu_0 = u_\nu \partial_\nu \text{Log } F.$$

Si on fait intervenir la vitesse pondérée $C_\mu = Fu_\mu$, la compressibilité $\partial_\mu C_\mu$ s'écrit

$$\begin{aligned}\partial_\mu C_\mu &= F\partial_\mu u_\mu + u_\mu \partial_\mu F \\ &= F(u_\nu \partial_\nu \text{Log } F - u_\nu \partial_\nu \text{Log } \mu_0) + Fu_\mu \frac{\partial_\mu F}{F}\end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_\mu C_\mu = Fu_\nu \partial_\nu \text{Log } \left(\frac{F^2}{\mu_0} \right)}.$$

Si le fluide est incompressible, le rapport $\frac{F^2}{\mu_0}$ reste constant le long d'une ligne de courant.

Donnons dans ce cas la démonstration de la propriété fondamentale de l'indice F :

Considérons la fonction $\frac{1}{ic} F\sqrt{u_\mu u_\mu}$ identique à F, et sa circulation le long d'une ligne d'univers quelconque C joignant deux points M_0 et M_1

$$\mathcal{G} = \frac{1}{ic} \int_{M_0}^{M_1} F\sqrt{u_\mu u_\mu} ds.$$

Donnons à chaque point x_μ de la ligne C une variation infiniment petite δx_μ , en maintenant fixes les points M_0 et M_1 . On a

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{G} &= \frac{1}{ic} \int_{M_0}^{M_1} \delta(F\sqrt{u_\mu u_\mu}) ds \\ &= \frac{1}{ic} \int_{M_0}^{M_1} \left(\partial_\mu F\sqrt{u_\mu u_\mu} \delta x_\mu + \frac{Fu_\mu}{\sqrt{u_\mu u_\mu}} \delta u_\mu \right) ds.\end{aligned}$$

On peut remplacer $\sqrt{u_\mu u_\mu}$ par ic et intégrer par parties le deuxième terme où $\delta u_\mu = \delta \frac{dx_\mu}{d\tau}$ (la partie toute intégrée étant nulle aux limites)

$$\delta \mathcal{G} = \int_{M_0}^{M_1} \left[\partial_\mu F + \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} (Fu_\mu) \right] \delta x_\mu ds.$$

La condition pour que l'intégrale $\mathcal{G} = \int_{M_0}^{M_1} Fds$ soit stationnaire est ainsi :

$$\partial_\mu F + \frac{1}{c^2} u_\mu u_\nu \partial_\nu F + \frac{1}{c^2} F \dot{u}_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} \partial_\nu F + \frac{1}{c^2} F \dot{u}_\mu = 0$$

soit :

$$c^2 \eta_{\mu\nu} \partial_\nu \text{Log } F + \dot{u}_\mu = 0$$

c'est l'équation des lignes de courant.

Formons enfin le tenseur tourbillon :

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu (Fu_\nu) - \partial_\nu (Fu_\mu) = F(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu) - \frac{F}{c^2} (K_\mu u_\nu - K_\nu u_\mu).$$

Contractons par u_ν :

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu\nu}u_\nu &= -F\dot{u}_\mu - \frac{F}{c^2}(-c^2K_\mu - K_\nu u_\nu u_\mu) \\ &= -F[\dot{u}_\mu - K_\nu \eta_{\mu\nu}].\end{aligned}$$

En remplaçant K_ν par $-c^2\partial_\nu \text{Log } F$, on voit que le crochet s'annule en vertu des équations du mouvement. Ainsi une propriété caractéristique des fluides holonômes, c'est que le tenseur tourbillon est orthogonal au courant. Comme dans le cas des fluides parfaits, il peut être remplacé par un vecteur tourbillon

$$\theta_\mu = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu \Omega_{\alpha\beta} = \frac{2iF}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu \partial_\alpha u_\beta.$$

APPENDICE C

§ 1. Grandeurs tensorielles tirées de la théorie générale des champs.

Nous rappelons ici les principes de la théorie classique des champs ⁽¹⁹⁾. Soit une fonction d'onde à n composantes ψ^r ($r = 1, 2, 3 \dots n$) définie en chaque point de l'univers, et ses dérivées $\psi^r_{, \mu} \equiv \partial_\mu \psi^r$. On se donne un lagrangien qui ne dépend explicitement que des ψ^r et des $\psi^r_{, \mu}$, soit $\mathcal{L}(\psi^r, \psi^r_{, \mu})$. Ce lagrangien est une « expression » mathématique abstraite. Par contre son intégrale d'univers sur un domaine quelconque $I = \int_\Omega \mathcal{L} d\omega$ est une « grandeur », c'est-à-dire qu'elle possède des propriétés d'invariance qui permettent de constituer tout le formalisme.

L'intégrale I est tout d'abord assujettie à une condition de *variation stationnaire*. Supposons que les composantes de la fonction d'onde subissent en chaque point des variations infinitésimales arbitraires $\delta\psi^r$, fonctions continues des coordonnées, qui s'annulent aux limites du domaine d'intégration Ω . On pose que, pour de telles variations, l'intégrale I est stationnaire : $\delta I = 0$

$$\delta I = \int_\Omega \delta \mathcal{L} d\omega = \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r} \delta \psi^r d\omega + \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{, \mu}} \delta \psi^r_{, \mu} d\omega.$$

Comme $\delta \psi^r_{, \mu} \equiv \delta(\partial_\mu \psi^r) = \partial_\mu(\delta \psi^r)$, on peut intégrer par parties la deuxième intégrale, et, comme les $\delta \psi^r$ s'annulent aux limites du domaine d'intégration, la partie toute intégrée est nulle :

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{, \mu}} \delta \psi^r_{, \mu} d\omega = - \int_\Omega \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{, \mu}} \right) \delta \psi^r d\omega$$

d'où

$$\delta I = \int_\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{, \mu}} \right) \right] \delta \psi^r d\omega.$$

Pour que cette variation soit nulle quels que soient les $\delta\psi$, on doit avoir :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^r} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{r, \mu}} \right)$$

ce qui, pour un lagrangien donné fournit la forme générale de l'équation d'onde, à savoir un groupe de n équations. Il est à remarquer que, les ψ^r étant en général complexes, on peut considérer leurs complexes conjugués ψ^{*r} comme des variables indépendantes, ce qui fournit un deuxième groupe de n équations :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*r}} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*r, \mu}} \right).$$

En second lieu, on sait que le formalisme classique exprime toutes les grandeurs observables relatives au corpuscule au moyen de quantités linéaires formées avec la fonction d'onde, soit $\psi^+ \Lambda \psi$, Λ étant une matrice carrée de rang n , ψ représentant l'ensemble des ψ^r mis sous forme de matrice-colonne, et ψ^+ l'ensemble des ψ^{*r} mis sous forme de matrice-ligne, adjointe de la première. Il en résulte que la multiplication de toutes les composantes de la fonction d'onde par un même facteur $e^{i\gamma}$ ($\gamma =$ nombre réel quelconque) — ce qu'on appelle une transformation de jauge de première espèce — ne modifie aucune des grandeurs observables relatives au corpuscule. Il est naturel d'exiger qu'une telle transformation laisse également invariante l'intégrale $I = \int_\Omega \mathcal{L} d\omega$, où, ce qui revient au même, le lagrangien $\mathcal{L}$ lui-même. Considérons en particulier le cas d'une transformation de jauge infinitésimale $\delta\gamma$:

$$\begin{aligned} \delta\psi^r &= \psi^r (e^{i\delta\gamma} - 1) = i\psi^r \delta\gamma \\ \delta\psi^{*r} &= \psi^{*r} (e^{-i\delta\gamma} - 1) = -i\psi^{*r} \delta\gamma. \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^r} i\psi^r \delta\gamma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*r}} i\psi^{*r} \delta\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{r, \mu}} i\psi^{r, \mu} \delta\gamma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*r, \mu}} i\psi^{*r, \mu} \delta\gamma \\ \delta \mathcal{L} &= i\delta\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^r} \psi^r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*r}} \psi^{*r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{r, \mu}} \psi^{r, \mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*r, \mu}} \psi^{*r, \mu} \right) \end{aligned}$$

ou, en utilisant les équations d'onde :

$$\delta \mathcal{L} = i\delta\gamma \left[\psi^r \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{r, \mu}} \right) - \psi^{*r} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*r, \mu}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^r} \partial_\mu \psi^r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*r}} \partial_\mu \psi^{*r} \right]$$

soit

$$\delta \mathcal{L} = i\delta\gamma \partial_\mu \left(\psi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{r, \mu}} - \psi^{*r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*r, \mu}} \right).$$

Ainsi la variation de l'intégrale I est :

$$\begin{aligned}\delta I &= i\delta\gamma \int_{\Omega} \delta_{\mu} \left(\psi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{,\mu}} - \psi^{*r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{*r}_{,\mu}} \right) d\omega \\ &= \delta\gamma \int_{\Sigma} i \left(\psi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{,\mu}} - \psi^{*r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{*r}_{,\mu}} \right) d\sigma_{\mu},\end{aligned}$$

où Σ représente l'hypersurface limitant le domaine d'intégration et $d\sigma_{\mu}$ l'élément infinitésimal de cette hypersurface. On voit que la dernière intégrale a la forme d'un flux pour une grandeur :

$$j_{\mu} = i \left(\psi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{,\mu}} - \psi^{*r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{*r}_{,\mu}} \right).$$

La variation δI représente la différence des valeurs de l'intégrale I, pour deux valeurs différentes de γ . Comme cette dernière, elle doit être un invariant tensoriel. C'est donc que la quantité j_{μ} dont elle représente le flux est un *vecteur*. On l'appelle le vecteur *courant*. Le flux devant être nul quel que soit $\delta\gamma$ et pour tout domaine Ω , le vecteur courant est conservatif.

$$\boxed{\partial_{\mu} j_{\mu} = 0}.$$

Cette première relation *tensorielle* exprime l'invariance de l'intégrale I relativement à une transformation de jauge.

Il faut maintenant exprimer l'invariance de l'intégrale I par rapport à une transformation quelconque de coordonnées. Considérons, en particulier, une transformation infinitésimale qui transforme x_{μ} en $x'_{\mu} = x_{\mu} + \delta x_{\mu}$ et chaque fonction d'onde $\psi^r_{(x)}$ en $\psi'^r_{(x')} = \psi^r_{(x)} + \delta \psi^r$.

Pour établir les variations qui en résultent, nous utiliserons une méthode proposée par E. Noether ⁽²⁰⁾. On a :

$$\delta I = \int \mathcal{L}[\psi'^r(x'), \psi'^r_{,\mu}(x')] d\omega' - \int \mathcal{L}[\psi^r(x), \psi^r_{,\mu}(x)] d\omega,$$

Les intégrales étant prises sur des domaines qui se correspondent dans les deux systèmes. On voit que la transformation δx_{μ} va influencer sur l'intégrale de trois façons : par les variations des x_{μ} représentant un point donné et dont dépendent les fonctions d'onde, par les variations de ces fonctions elles-mêmes, qui deviennent d'autres fonctions des x_{μ} — sauf dans le cas d'une fonction d'onde scalaire —, enfin par la variation du domaine infinitésimal $d\omega$.

Pour qu'on puisse grouper les deux éléments différentiels et les intégrer sous forme d'une différence sous le même signe $\int$, il faut d'abord

les exprimer au moyen des mêmes variables, soit les x_μ . Transformons, en ce sens, le premier :

$$\mathcal{L}[\psi^r(x'), \psi'^r_{,\mu}(x')] d\omega' = \{\mathcal{L}[\psi^r(x), \psi'^r_{,\mu}(x)] + \partial_\nu \mathcal{L}[\psi^r(x), \psi'^r_{,\mu}(x)] \delta x_\nu + J \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) d\omega.$$

$J \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)$ étant le jacobien de la transformation, (qui pour une transformation infinitésimale se réduit à $1 + \partial_\nu \delta x_\nu$) et toutes les fonctions étant maintenant exprimées en x_μ . Il vient en négligeant les termes du second ordre :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\psi^r(x'), \psi'^r_{,\mu}(x')] d\omega' &= [\mathcal{L}(\psi^r, \psi'^r_{,\mu}) + \partial_\nu \mathcal{L}(\psi^r, \psi'^r_{,\mu}) \delta x_\nu + \mathcal{L}(\psi^r, \psi'^r_{,\mu}) \partial_\nu \delta x_\nu] d\omega \\ &= \{\mathcal{L}(\psi^r, \psi'^r_{,\mu}) + \partial_\nu [\mathcal{L}(\psi^r, \psi'^r_{,\mu}) \delta x_\nu]\} d\omega \end{aligned}$$

ou au second ordre près :

$$= \{\mathcal{L}(\psi^r, \psi'^r_{,\mu}) + \partial_\nu [\mathcal{L}(\psi^r, \psi'^r_{,\mu}) \delta x_\nu]\} d\omega.$$

On peut alors écrire, tout étant exprimé en x_μ :

$$\delta \mathcal{I} = \int \{\mathcal{L}(\psi^r, \psi'^r_{,\mu}) - \mathcal{L}(\psi^r, \psi^r_{,\mu}) + \partial_\nu [\mathcal{L}(\psi^r, \psi^r_{,\mu}) \delta x_\nu]\} d\omega.$$

Les deux premiers termes expriment la différence entre le lagrangien transformé et le lagrangien non transformé, pour les mêmes valeurs de x_μ c'est-à-dire en *deux points différents* de l'univers *ayant les mêmes coordonnées* dans les deux systèmes respectivement (variation « substantielle »). Désignons-la par $\bar{\delta}$. Elle s'exprime par

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r} \bar{\delta} \psi^r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{,\mu}} \bar{\delta} \psi^r_{,\mu}$$

ou, en intégrant par parties le second terme :

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{,\mu}} \right) \right] \bar{\delta} \psi^r + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{,\mu}} \bar{\delta} \psi^r \right).$$

Le crochet est nul en raison des équations de champ. Il reste donc :

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r_{,\mu}} \bar{\delta} \psi^r \right).$$

Reste à exprimer la variation substantielle $\bar{\delta} \psi^r$ de la fonction d'onde elle-même. D'après sa définition, il est clair qu'elle se compose de deux parties. D'une part la variation produite par le changement d'axes sur la fonction ψ^r *en un point donné* de l'espace-temps (dont, par conséquent, les coordonnées changent). C'est la variation « locale » qui est déterminée par la variance de la fonction d'onde. D'autre part la variation due à ce qu'on considère deux points différents de l'espace-temps ayant mêmes coordonnées dans les deux systèmes respectivement. Cette variation

fait intervenir le gradient de la fonction ψ^r et un déplacement qui est $-\delta x_\mu$ puisque δx_μ représente la variation subie par les coordonnées d'un même point de l'univers. Finalement donc on a $\bar{\delta}\psi^r = \delta\psi^r - \partial_\nu\psi^r\delta x_\nu$ ce qui donne $\bar{\delta}\mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_{,\mu}} (\delta\psi^r - \psi^r_{,\nu}\delta x_\nu) \right]$.

On obtient ainsi

$$\delta I \equiv \int \partial_\mu \left[\left(\delta_{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_{,\mu}} \psi^r_{,\nu} \right) \delta x_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_{,\mu}} \delta\psi^r \right] d\omega = 0$$

ce qui exige, le domaine d'intégration étant arbitraire, que l'on ait la formule de Noether :

$$\partial_\mu \left[\left(\delta_{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_{,\mu}} \psi^r_{,\nu} \right) \delta x_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_{,\mu}} \delta\psi^r \right] = 0$$

Bien entendu, on doit donner aux δx_ν une forme déterminée, suivant le type de transformation envisagée, et les $\delta\psi^r$ s'expriment en fonction des δx_ν , suivant des expressions qui dépendent de la variance de la fonction d'onde.

Appliquons d'abord la formule de Noether au cas d'une simple translation infinitésimale des axes. Les $\delta\psi^r$ sont nuls, les axes de projection restant invariables. Les δx_μ sont les mêmes en tout point. On a ainsi :

$$\delta x_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_{,\nu}} \psi^r_{,\mu} - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) = 0$$

ce qui exige que la divergence soit nulle, les δx_μ étant arbitraires.

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_{,\nu}} \psi^r_{,\mu} - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) = 0.$$

Enfin, les δx_μ arbitraires étant les composantes d'un vecteur, le critérium de tensorialité nous apprend que la quantité ci-dessus est également un vecteur et, finalement, que l'expression :

$$t_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_{,\nu}} \psi^r_{,\mu} - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

est un tenseur qu'on appelle *tenseur canonique d'énergie-impulsion*.

Bien entendu, cette relation concerne non seulement les fonctions ψ^r , mais leurs complexes conjugués ψ^{*r} , si bien que l'expression complète s'écrit :

$$t_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_{,\nu}} \psi^r_{,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{*r}_{,\nu}} \psi^{*r}_{,\mu} - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

ce qui signifie évidemment aussi :

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\nu}} \psi_{,\mu}^* \right) - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Nous considérerons les ψ^* comme sous-entendus en tant que variables indépendantes.

La relation tensorielle de conservation :

(C-1)

$$\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$$

exprime ainsi l'invariance de l'intégrale I vis-à-vis d'une translation infinitésimale des axes.

On obtient une dernière équation tensorielle sur le champ en appliquant la formule de Noether au cas d'une rotation infinitésimale, ou plus exactement d'une transformation de Lorentz qu'on peut définir par un tenseur infinitésimal antisymétrique $\omega_{[\mu\nu]}$. On a : $\delta x_\mu = \omega_{[\mu\nu]} x_\nu$ et la variation de la fonction d'onde s'exprime par :

$$\delta \psi = \omega_{[\mu\nu]} \mathcal{Z}_{[\mu\nu]}^{rs} \psi^s.$$

$\mathcal{Z}_{[\mu\nu]}^{rs}$ est un opérateur antisymétrique en μ et ν , dont la forme dépend de la nature de la fonction d'onde. Ainsi pour un champ vectoriel, on a :

$$\mathcal{Z}_{[\mu\nu]}^{rs} = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}^{rs} = \frac{1}{2} (\delta_{r\mu} \delta_{s\nu} - \delta_{r\nu} \delta_{s\mu}).$$

De même, si la fonction d'onde est un 4-spineur qu'on peut écrire sous forme d'une matrice-colonne ψ , on a :

$$\delta \psi = \omega_{[\mu\nu]} \mathcal{Z}_{\mu\nu}^{op} \psi$$

avec : $\mathcal{Z}_{\mu\nu}^{op} = \frac{1}{8} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ les γ_μ étant les quatre matrices de Von Neuman ⁽¹⁹⁾.

La formule de Noether donne alors :

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\nu}} \omega_{\mu\lambda} \mathcal{Z}_{[\mu\lambda]}^{rs} \psi^s - t_{\mu\nu} \omega_{\mu\lambda} x_\lambda \right) = 0.$$

De même que tout à l'heure nous avons (implicitement) assimilé la transformation infinitésimale δx_μ , résultant d'une translation des axes, à une translation ponctuelle dans un système d'axes fixes — d'où résultait son caractère tensoriel — de même nous pouvons aussi assimiler la transformation de coordonnées $\omega_{[\mu\lambda]}$ à une rotation infinitésimale considérée dans un système d'axes fixes, rotation qui, on le sait, a la variance d'un tenseur antisymétrique de deuxième ordre. De plus,

ce tenseur étant indépendant des coordonnées, sort de la divergence comme tenseur arbitraire :

$$\omega_{\mu\lambda}\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\nu} \mathcal{L}_{[\mu\lambda]}^{\text{rs}}\psi^s - t_{\mu\nu}x_\lambda\right) = 0.$$

Un raisonnement, identique à celui du paragraphe précédent, nous montre que l'expression :

$$f_{[\mu\nu]\lambda} = \mathcal{L}_{[\mu\nu]}^{\text{rs}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\nu} \psi^s$$

antisymétrique en μ et ν , est un *tenseur* ^(21,22). Nous le nommerons *tenseur de Belinfante*. En tenant compte du caractère arbitraire et antisymétrique de $\omega_{\mu\lambda}$, on a alors :

$$\frac{1}{2} \partial_\nu (x_\mu t_{\lambda\nu} - x_\lambda t_{\mu\nu}) + \partial_\nu f_{\mu\lambda\nu} = 0$$

Si on effectue la première dérivation en tenant compte de la relation $\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$ il vient :

(C-2)

$$\frac{1}{2} (t_{\mu\lambda} - t_{\lambda\mu}) = \partial_\nu f_{[\mu\lambda]\nu}$$

Cette équation est la forme ordinaire sous laquelle on exprime l'invariance de l'intégrale I relativement aux transformations de Lorentz infinitésimales.

§ 2. Transformations de jauge.

Parfois aussi on conserve la condition de divergence nulle :

$$\partial_\nu \left[\frac{1}{2} (x_\mu t_{\lambda\nu} - x_\lambda t_{\mu\nu}) + f_{\mu\lambda\nu} \right] = 0$$

ou encore

$$\partial_\nu [(x_\mu t_{\lambda\nu} - x_\lambda t_{\mu\nu}) + (f_{\mu\lambda\nu} - f_{\lambda\mu\nu})] = 0$$

La première parenthèse représente le moment (par rapport à l'origine) du tenseur canonique. On peut, par une transformation simple, mettre également la seconde parenthèse sous forme d'un moment ⁽²³⁾. On peut écrire :

$$\partial_\nu f_{\mu\lambda\nu} = \partial_\nu f_{\sigma\lambda\nu} \delta_{\sigma\mu} = \partial_\nu f_{\sigma\lambda\nu} \partial_\sigma x_\mu$$

ou, en intégrant par parties :

$$\partial_\nu f_{\mu\lambda\nu} = \partial_\sigma (x_\mu \partial_\nu f_{\sigma\lambda\nu}) - x_\mu \partial_\sigma \partial_\nu f_{\sigma\lambda\nu}$$

On peut encore intégrer par parties le second terme :

$$\partial_\nu f_{\mu\lambda\nu} = \partial_\sigma (x_\mu \partial_\nu f_{\sigma\lambda\nu}) - \partial_\nu (x_\mu \partial_\sigma f_{\sigma\lambda\nu}) + \delta_{\nu\mu} \partial_\sigma f_{\sigma\lambda\nu} = \partial_\nu [x_\mu \partial_\sigma (f_{\nu\lambda\sigma} - f_{\sigma\lambda\nu})] + \partial_\nu f_{\nu\lambda\mu}$$

On peut appliquer le même procédé au dernier terme :

$$\partial_\nu f_{\nu\lambda\mu} = \partial_\nu f_{\nu\sigma\mu} \partial_\sigma x_\lambda = \partial_\sigma (x_\lambda \partial_\nu f_{\nu\sigma\mu}) - x_\lambda \partial_\sigma \partial_\nu f_{\nu\sigma\mu}$$

Le second terme s'annule, $f_{\nu\sigma\mu}$ étant antisymétrique en ν et σ . Il reste donc :

$$\partial_\nu f_{\mu\lambda\nu} = \partial_\nu [x_\mu \partial_\sigma (f_{\nu\lambda\sigma} - f_{\sigma\lambda\nu})] + \partial_\nu (x_\lambda \partial_\sigma f_{\sigma\nu\mu})$$

On a de même, en échangeant λ et μ :

$$\partial_\nu f_{\lambda\mu\nu} = \partial_\nu [x_\lambda \partial_\sigma (f_{\nu\mu\sigma} - f_{\sigma\mu\nu})] + \partial_\nu (x_\mu \partial_\sigma f_{\sigma\nu\lambda})$$

En retranchant ces deux égalités, il vient :

$$\partial_\nu (f_{\lambda\mu\nu} - f_{\mu\lambda\nu}) = \partial_\nu [x_\lambda \partial_\sigma (f_{\nu\mu\sigma} - f_{\sigma\mu\nu} + f_{\nu\sigma\mu}) - x_\mu \partial_\sigma (f_{\nu\lambda\sigma} - f_{\sigma\lambda\nu} + f_{\nu\sigma\lambda})]$$

On met ainsi en évidence un tenseur :

$$K_{[\mu[\nu\sigma]]} = - (f_{\mu\nu\sigma} - f_{\mu\sigma\nu} - f_{\nu\sigma\mu})$$

dont il est facile de voir, en raison de l'antisymétrie des f , qu'il est antisymétrique en ν et σ .

Si on pose :

$$\tau_{\mu\nu} = \partial_\nu K_{\mu\nu\sigma}$$

notre équation devient : $\partial_\nu [(x_\lambda t_{\mu\nu} - x_\mu t_{\lambda\nu}) + (x_\lambda \tau_{\mu\nu} - x_\mu \tau_{\lambda\nu})] = 0$ ou encore, en posant $t'_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}$,

(C-3)

$$\partial_\nu (x_\lambda t'_{\mu\nu} - x_\mu t'_{\lambda\nu}) = 0$$

Ainsi le moment du tenseur $t'_{\mu\nu}$ qu'on appelle *tenseur total d'énergie-impulsion*, est conservatif. Quant au tenseur $\tau_{\mu\nu}$ qu'on appelle *tenseur complémentaire d'énergie-impulsion*, il résulte du caractère antisymétrique de $K_{\mu\nu\sigma}$ que $\partial_\nu \tau_{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\sigma K_{\mu[\nu\sigma]} = 0$:

$\tau_{\mu\nu}$ est conservatif comme $t_{\mu\nu}$. Donc $t'_{\mu\nu}$ est également conservatif. Enfin $t'_{\mu\nu}$ étant conservatif et ayant son moment conservatif, il en résulte immédiatement qu'il est symétrique, c'est pourquoi on l'appelle parfois *tenseur d'énergie-impulsion symétrisé*. Cela revient du reste à écrire l'équation fondamentale (3) sous la forme :

$$\frac{1}{2} (t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu}) + \frac{1}{2} (\tau_{\mu\nu} - \tau_{\nu\mu}) = 0$$

Et, effectivement, on voit facilement que : $\partial_\sigma f_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\tau_{\nu\mu} - \tau_{\mu\nu})$.

M. Takabayasi a montré ⁽²⁴⁾ que le procédé de symétrisation ci-dessus, dû à Belinfante et Rosenfeld, n'est en fait qu'une conséquence particulière d'une propriété générale d'invariance de jauge appartenant aux deux équations fondamentales (1) et (2). Soit, en effet, un tenseur arbitraire à trois indices $\varphi_{[\mu\nu]\varrho}$ antisymétrique en μ et ν . On en tire l'expression d'un autre tenseur à trois indices :

$$\Phi_{\mu[\nu\varrho]} = \varphi_{\mu\nu\varrho} - \varphi_{\mu\varrho\nu} - \varphi_{\nu\varrho\mu}$$

dont on voit immédiatement qu'il est antisymétrique en ν et ϱ . Effectuons alors la transformation :

$$\begin{aligned} t'_{\mu\nu} &= t_{\mu\nu} - \partial_\varrho \Phi_{\mu\nu\varrho} \\ f'_{\mu\nu\varrho} &= f_{\mu\nu\varrho} - \varphi_{\mu\nu\varrho}. \end{aligned}$$

On a : $\partial_\nu t'_{\mu\nu} = \partial_\nu t_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\varrho \Phi_{\mu\nu\varrho}$.

Le deuxième terme est nul par antisymétrie. La relation $\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$ est donc vérifiée également pour le tenseur transformé : $\partial_\nu t'_{\mu\nu} = 0$.

D'autre part :

$$2\partial_\varrho f'_{\mu\nu\varrho} = 2\partial_\varrho f_{\mu\nu\varrho} - 2\partial_\varrho \varphi_{\mu\nu\varrho}$$

$$t'_{\mu\nu} - t'_{\nu\mu} = t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu} - \partial_\varrho \Phi_{\mu\nu\varrho} + \partial_\varrho \Phi_{\nu\mu\varrho}$$

Les deux derniers termes s'expriment par :

$$-\partial_\varrho(\varphi_{\mu\nu\varrho} - \varphi_{\mu\varrho\nu} - \varphi_{\nu\varrho\mu} - \varphi_{\nu\mu\varrho} + \varphi_{\varrho\mu\nu} - \varphi_{\varrho\nu\mu}) = -2\partial_\varrho \varphi_{\mu\nu\varrho}$$

qui disparaît avec le terme semblable dans $2\partial_\varrho f'_{\mu\nu\varrho}$.

On a donc $\frac{1}{2}(t'_{\mu\nu} - t'_{\nu\mu}) = \partial_\varrho f'_{\mu\nu\varrho}$: la deuxième relation fondamentale est aussi vérifiée avec les nouveaux tenseurs $t'_{\mu\nu}$ et $f'_{\mu\nu\varrho}$.

Enfin, si le champ est localisé dans une certaine région de l'espace, les fonctions d'onde et les tenseurs fondamentaux s'annulant en tout point extérieur à un certain hypertube d'univers $\mathcal{C}$, il est possible d'étendre au présent formalisme certaines des considérations que nous avons développées dans notre chapitre II à propos d'une masse de fluide classique. Ainsi, on peut définir une *impulsion totale de champ* :

$$G_\mu = \int_\Pi t_{\mu 4} d\nu$$

le chiffre 4 indiquant la composante sur l'axe des temps Λ orthogonal à un certain hyperplan d'espace Π , et l'intégrale étant étendue à la région de ce plan où $t_{\mu\nu}$ est non nul. On sait alors qu'en raison de l'équation : $\partial_\nu t_{\mu\nu} = 0$, G_μ est un vecteur indépendant du choix de l'hyperplan

II (Appendice A). Or, si on effectue la transformation de jauge, on a :

$$G'_\mu = \int_{\Pi} t_{\mu 4} d\nu - \int_{\Pi} \partial_\varphi \Phi_{\mu 4 \varphi} d\nu$$

La deuxième intégrale peut se subdiviser en : $-\int_{\Pi} \partial_4 \Phi_{\mu 4 4} d\nu$ qui est nulle à cause de l'antisymétrie de $\Phi_{\mu[\nu\rho]}$, et $-\int_{\Pi} \partial_k \Phi_{\mu 4 k} d\nu$. Celle-ci fournit : $-\int_{\Sigma} \Phi_{\mu 4 k} d\sigma_k$.

Cette intégrale est prise sur la surface d'espace Σ limitant le volume considéré. Comme cette surface est située tout entière dans la région de l'espace où les tenseurs du champ sont nuls, elle est nulle (à condition qu'on ait supposé que les tenseurs de jauge sont aussi nuls dans la même région, hypothèses que l'on peut toujours faire sans rien changer à ce qui se passe dans la région à champ non nul). On a donc :

$$G'_\mu = G_\mu$$

le vecteur impulsion totale est invariant de jauge.

Il en est de même des grandeurs intégrées qu'on peut définir au moyen du tenseur de Belinfante. Si on considère le tenseur : $\frac{1}{2}(x_\mu t_{\lambda\nu} - x_\lambda t_{\mu\nu}) + f_{\mu\lambda\nu}$ qui, nous le savons, est conservatif, on peut définir un moment angulaire total de champ :

$$\Gamma_{[\mu\lambda]} = \int_{\Pi} \left[\frac{1}{2}(x_\mu t_{\lambda 4} - x_\lambda t_{\mu 4}) + f_{\mu\lambda 4} \right] d\nu$$

qui est un tenseur. La transformation de jauge donne alors :

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\mu\lambda} &= \int_{\Pi} \left[\frac{1}{2}(x_\mu t_{\lambda 4} - x_\lambda t_{\mu 4}) - \frac{1}{2}(x_\mu \partial_\varphi \Phi_{\lambda 4 \varphi} - x_\lambda \partial_\varphi \Phi_{\mu 4 \varphi}) \right] d\nu + \int_{\Pi} (f_{\mu\lambda 4} - \varphi_{\mu\lambda 4}) d\nu \\ \Gamma'_{\mu\lambda} &= \Gamma_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \int_{\Pi} (x_\mu \partial_\varphi \Phi_{\lambda 4 \varphi} - x_\lambda \partial_\varphi \Phi_{\mu 4 \varphi}) d\nu - \int_{\Pi} \varphi_{\mu\lambda 4} d\nu \end{aligned}$$

La première intégrale s'intègre par parties, la partie toute intégrée étant rejetée sur la surface Σ et donc s'annulant. Il reste :

$$\Gamma'_{\mu\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} \int_{\Pi} (\Phi_{\lambda 4 \varphi} \partial_\varphi x_\mu - \Phi_{\mu 4 \varphi} \partial_\varphi x_\lambda) d\nu - \int_{\Pi} \varphi_{\mu\lambda 4} d\nu$$

Le premier intégrand vaut :

$$\frac{1}{2} (\Phi_{\lambda 4 \mu} - \Phi_{\mu 4 \lambda})$$

soit :

$$\frac{1}{2} (\varphi_{\lambda 4 \mu} - \varphi_{\lambda \mu 4} - \varphi_{4 \mu \lambda} - \varphi_{\mu 4 \lambda} + \varphi_{\mu \lambda 4} + \varphi_{4 \lambda \mu}) = \varphi_{\mu\lambda 4}$$

Il s'annule donc avec le second intégrand. On a donc :

$$\Gamma'_{\mu\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda} :$$

le moment angulaire total est encore invariant de jauge.

En résumé, à un système de fonctions d'onde dont l'évolution est déterminée par un formalisme lagrangien, correspond univoquement un champ tensoriel déterminé par deux tenseurs $t_{\mu\nu}$ et $f_{\mu\nu\rho}$ obéissant aux deux relations fondamentales de conservation. Par contre, ces deux équations ne déterminent les deux tenseurs qu'avec une très large indétermination de jauge. Il est remarquable que le changement de jauge laisse invariable les deux tenseurs G_μ et $\Gamma_{\mu\nu}$ résultant d'une intégration sur l'ensemble du champ.

Il est aussi possible de dire — et cela permet des développements plus intéressants — qu'un système de fonctions d'onde peut fournir de façon univoque les deux grandeurs globales G_μ et $\Gamma_{\mu\nu}$, mais qu'il lui correspond une infinité de systèmes de tenseurs $t_{\mu\nu}$ et $f_{\mu\nu\rho}$ obéissant aux deux équations fondamentales de conservation, mais différant par leurs jauges, systèmes entre lesquels il est permis d'en choisir un particulier en soumettant le choix de la jauge à des conditions supplémentaires convenables. Ainsi si on choisit simplement : $\varphi_{\mu\nu\lambda} = f_{\mu\nu\lambda}$, alors le nouveau tenseur de Belinfante $f'_{\mu\nu\lambda}$ est nul, le tenseur $t'_{\mu\nu}$ est symétrique, il est à la fois conservatif et de moment conservatif, c'est simplement — comme nous l'avions annoncé — le tenseur symétrisé d'impulsion-énergie, qui peut, à volonté, être choisi pour représenter l'ensemble du formalisme. Certains choix sont, nous le verrons, plus intéressants.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) L. DE BROGLIE. — *Théorie des particules de spin $\frac{1}{2}$* , Paris, Gauthier-Villars, 1952, chap. iv.
- (2) J. V. WEYSSSENHOFF et RAABE. — *Acta Phys. Pol.*, 9, 1947, 8.
- (3) C. MÖLLER. — *Theory of Relativity*, Oxford, Clarendon Press, 1955, chap. vi.
- (4) FRENKEL. — *ZS f Phys.*, 37, 1926, 243.
- (5) MATHISSON. — *ZS f Phys.*, 67, 1931, 270 et 826; *Math. Ann.*, 107, 1933, 400; *Acta Phys. Pol.*, 6, 1937, 163 et 218.
- (6) EINSTEIN et GROMMER. — *Sitz Preuss Akad Wiss*, 1, 1927.
- (7) J. P. VIGIER. — *Structure des microobjets*, Paris, Gauthier-Villars, 1956, chap. III.
- (8) LUBANSKI. — *Acta Phys. Pol.*, 6, 1937, 356.
- (9) TAKABAYASI. — *Prog. Theor Phys.*, Suppl. 4, 1957.
- (10) EDDINGTON. — *Mathematical Theory of Relativity*, Oxford, Clarendon Press.
- (11) L. DE BROGLIE, *La physique quantique restera-t-elle indéterministe?* Paris, Gauthier-Villars, 1953, exp. gén.
- (12) MÖLLER. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 10, 1949, 5.
- (13) PRYCE. — *Proc. R S London*, A 195, 1948, 62.
- (14) BOHM et VIGIER. — *Phys. Rev.*, 109, 1958, 1882.
- (15) POINCARÉ. — *Acta Math.*, 7, 1885, 259.
- (16) L. DE BROGLIE. — *Journ. Phys.*, VI 8, 1927, 225, § III.
- (17) BOHM VIGIER LOCHAK HALBWACHS. — *Séminaire L. de Broglie*, Institut H. Poincaré, n° 8, 1956.
- (18) HALBWACHS. — *C. R.*, 243, 1956, 1022 et 1098.
- (19) CORSON. — *Introduction to Tensors, Spinors and relativistic Wave Equations*, Blackie and Son, London, 1953, chap. i.
- (20) NOETHER. — *Göttinger Nachrichten*, 1918, 235.
- (21) ROSENFELD. — *Acad. Roy. Belgique*, 18, 6, 1940.
- (22) BELINFANTE. — *Physica*, 7, 1939, 887.
- (23) WINOGRADSKI. — *Cahiers de Phys.*, 67-1956 et 16-1959.
- (24) TAKABAYASI. — *Séminaire L. de Broglie*, Institut H. Poincaré, janvier 1957.
- (25) HALBWACHS LOCHAK VIGIER. — *C. R.*, 241, 1955, 692.
- (26) HALBWACHS LOCHAK VIGIER. — *C. R.*, 241, 1955, 744.
- (27) HALBWACHS. — *Journ. Phys.*, 17, 1956, 67.
- (28) BOHM. — *Phys. Rev.*, 85, 1952, 166 et 180.
- (29) VIGIER. — *Structure des microobjets*, Paris, Gauthier-Villars, 1956, Introduction générale.
- (30) L. DE BROGLIE. — *Formulation non linéaire et causale de la Mécanique Ondulatoire*, Paris, Gauthier-Villars, 1957.
- (31) BOHM. — *Phys. Rev.*, 89, 1953, 458.
- (32) BOHM et VIGIER. — *Phys. Rev.* 96, 1954, 208.
- (33) VIGIER. — *Structure des microobjets*, Paris, Gauthier-Villars, 1956, chap. iv.
- (34) EINSTEIN INFELD HOFFMANN. — *Ann. Math.*, 41, 1940, 455.
- (35) INFELD et WALLACE. — *Phys. Rev.*, 57, 1940, 797.

- (40) TAKABAYASI. — *Prog. Theor. Phys.*, 8, 1952, 143.
 - (41) MADELUNG. — *ZS f Phys.*, 40, 1927, 322.
 - (42) L. DE BROGLIE. — *C. R.*, 185, 1927, 1118.
 - (43) TAKABAYASI. — *Prog. Theor. Phys.*, 9, 1953, 187.
 - (44) LICHNEROWICZ. — *Éléments de calcul tensoriel*, Paris, Colin, 1955, chap. vii.
 - (45) LICHNEROWICZ. — *Ann. Scient. de l'ENS*, 60, 1943, 247.
 - (46) LICHNEROWICZ. — *Cours au Coll. de Fr.* (polycopié), 1952-1953.
 - (47) LOCHAK. — *Séminaire de L. Broglie*, Institut H. Poincaré, 8, 1956, Annexe.
 - (48) JAKOBI et LOCHAK. — *C. R.*, 243, 1956, 234 et 357.
 - (49) AYMARD. — *C. R.*, 243, 1956, 885 et 1100 — et 244, 1957, 3133.
 - (50) TAKABAYASI et VIGIER. — *Prog. Theor. Phys.*, 18, 1957.
 - (51) VIGIER, HILLION et LOCHAK. — *C. R.*, 246, 1958, 394 et sq.
 - (52) UNAL et VIGIER. — *C. R.*, 245, 1957, 1787 et 1891.
 - (53) TAKABAYASI. — *C. R.*, 246, 1958, 64.
 - (54) GÜRSEY. — *Nuov Cim.*, 5, 1957, 784.
 - (55) L. DE BROGLIE. — *Théorie des particules de spin $\frac{1}{2}$* , Paris, Gauthier-Villars, 1952, chap. vi.
 - (56) PAULI. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 6, 1936, 109.
 - (57) KOFFINCK. — *Ann. d. Phys.*, 38, 1940, 421.
 - (58) PETIAU. — *Journ. Math. pures et appl.*, 25, 1946, 235.
 - (59) KARPMANN et RAMAN. — *C. R.*, 243, 1956, 1284.
 - (60) HALBWACHS. — *C. R.*, 245, 1957, 1298.
 - (61) HALBWACHS. — *C. R.*, 245, 1957, 1392.
 - (62) HALBWACHS. — *C. R.*, 245, 1957, 1513.
 - (65) VIGIER. — *Structure des microobjets*, Paris, Gauthier-Villars, 1956, chap. ii.
 - (66) JAKOBI et LOCHAK. — *C. R.*, 244, 1957, 1014.
 - (67) SCHÖNBERG. — *Nuov Cim.*, 1, 1955, 543.
 - (68) COSTA DE BEAUREGARD. — *Thèse*, Paris, 1943.
 - (69) PHAM MAU QUAN. — *Journ. of rat Mec and An.*, 5, 1956, 473.
 - (70) BOHM TIOMNO et SCHILLER. — *Nuov Cim.*, Supp. I, 1955, 48.
 - (71) BHABHA. — *Rev. Mod. Phys.*, 21, 1949, 451.
 - (72) YVON. — *Journ. Phys.*, 1, 1940, 18.
-

TABLE DES MATIÈRES

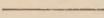
PRÉFACE, de M. Louis de BROGLIE	v
AVERTISSEMENT	1
INTRODUCTION	5
Représentation hydrodynamique de Madelung	5
Loi de guidage de l'interprétation causale	8
Théorème statistique de Bohm et Vigier	11
Modèle hydrodynamique du vide	14
Fluides à spin et corpuscules tournants	16
Structure du vide et mécanique quantique	18
 CHAPITRE I. — <i>Théorie classique du corpuscule tournant relativiste</i>	23
Lagrangien de Frenkel	23
Équations de Frenkel	27
Théorie de Mathisson : formalisme	32
Théorie de Mathisson : cas unipolaire	35
Théorie de Mathisson : cas dipolaire	39
Théorie de Weyssenhoff ..	48
 CHAPITRE II. — <i>Théorie générale du corpuscule tournant relativiste</i>	53
Principe	53
Grandeurs cinématiques	56
Densité d'énergie-impulsion et moment de rotation	63
Impulsion totale	66
Pseudocentres de masse	72
Moment angulaire total et moment angulaire interne	77
Équations fondamentales. Centre de masse	80
Référentiel fondamental	83
Centre de gravité. Théorie de Möller	86
Centre de matière. Modèle de Bohm et Vigier	90
 CHAPITRE III. — <i>Étude de quelques cas particuliers de mouvement</i>	95
Mouvement de Weyssenhoff : signification	95
Mouvement de Weyssenhoff : équations dynamiques . . .	98
Mouvement de Weyssenhoff : spin	100

Mouvement de Weyssenhoff : impulsion transversale	103
Mouvement de Weyssenhoff : intégration	106
Balourd et giration	111
Relations diverses dans le cas général	115
Corpuscule classique de Dirac	119
Balourd et giration colinéaires : signification	122
Balourd et giration colinéaires : relations caractéristiques	124
Corpuscule classique de Dirac : équations dynamiques	128
Corpuscule classique de Dirac : intégration du mouvement	132
 CHAPITRE IV. — <i>Théorie générale des modèles hydrodynamiques</i>	141
Vitesse locale et densité de matière	141
Décomposition du tenseur d'énergie-impulsion	143
Décomposition du moment de rotation propre	149
Autre décomposition proposée par M. Takabayasi	154
Classification des modèles hydrodynamiques	158
Représentation de la fonction d'onde de Schrödinger	161
Fonction d'onde de Klein-Gordon : représentation de MM. de Broglie et Takabayasi	164
Fonction d'onde de Klein-Gordon : autre représentation et approximation non-relativiste	172
Fonction d'onde de Dirac. Représentation tensorielle	178
Fonction d'onde de Dirac. Modèle hydrodynamique : spin	186
Fonction d'onde de Dirac. Tenseur d'énergie-impulsion et équations hydrodynamiques	191
 CHAPITRE V. — <i>Fluides à spin à structure moléculaire</i>	199
Généralités	199
Formulation lagrangienne du fluide matière pure sans spin	202
Formulation lagrangienne du fluide matière pure à spin	206
Goutte de Bohm et Vigier dans un champ de forces extérieures	212
Généralités sur les fluides à spin à tensions internes	222
Fluides à spin sans courant de chaleur	224
Cas d'une interaction « fluide parfait »	231
Cas d'une interaction « moment angulaire-tourbillon »	235
 APPENDICE A.	243
Variances et dérivées totales en hydrodynamique	243
Lois de conservation	247
Intégrales de volume covariantes. Théorème de Möller	251
 APPENDICE B	257
Hydrodynamique relativiste des fluides classiques	257
Fluides parfaits	262
Fluides visqueux	269
Fluides holonômes	276
 APPENDICE C	279
Grandeurs tensorielles tirées de la théorie générale des champs	279
Transformations de jauge	285
 BIBLIOGRAPHIE	291

SECONDE THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ



Classifications récentes des particules élémentaires

Vu et approuvé :

Paris, le 21 juin 1958.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

Joseph PÉRÈS

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Jean SARRAILH



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

157170-60

Dépôt légal, Imprimeur, 1960, n° 1392.

Imprimé en France

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

157170-60

Dépôt légal, Imprimeur, 1960, n° 1392.

Imprimé en France